

SOME CURVILINEAR COORDINATES IN DYNAMIC ELASTICITY THEORY

Gorgidze D.,*Doctor of Engineering Science, Professor, Georgian Technical University, Tbilisi.***Museridze R.***PhD in Civil Engineering, Assistant Professor, Georgian Technical University, Georgian Technical University, Tbilisi*

НЕКОТОРЫЕ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ В ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Горгидзе Д.А.*доктор технических наук, профессор, Грузинский технический университет, Тбилиси***Мусеридзе Р.Р.***академический доктор технических наук, профессор, Грузинский технический университет, Тбилиси*<https://doi.org/10.5281/zenodo.10451424>**Abstract**

In various orthogonal curvilinear coordinate systems, general solutions to the dynamic problem of the theory of elasticity for an isotropic homogeneous body are constructed. Dynamic problems of the theory of elasticity associated with pure shear, pure torsion, plane-strain and axisymmetric stress states are considered. Solutions to some specific dynamic problems are given.

Аннотация

В различных ортогональных криволинейных системах координат строятся общие решения динамической задачи теории упругости для изотропного однородного тела. Рассматриваются динамические задачи теории упругости связанные с чистым сдвигом, чистым кручением, плоскодеформированным и осесимметричным напряженным состоянием. Приводятся решения некоторых конкретных динамических задач.

Keywords: dynamic, curvilinear, coordinate, elasticity.**Ключевые слова:** динамический, криволинейные, координата, упругость.**Введение**

Некоторые криволинейные координаты. Рассмотрим на плоскости ортогональную криволинейную изотермическую систему координат θ, α , в которой оси Ox и Oy декартовой системы координат x, y являются осями ее симметрии. В изотермических координатах параметры (коэффициенты) Ламе $h_\theta = h_\alpha = h(\theta, \alpha)$. Справедливы следующие равенства

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} = 0. \quad (1.1)$$

Если ввести прямолинейную координату z , ортогональную к плоскости координат θ, α, z , то получим систему координат с осью сдвига Oz ; параметры Ламе системы $h_\theta = h_\alpha = h(\theta, \alpha), h_z = 1$.

Если же вращать систему координат вокруг одной из осей ее симметрии, то получим вращательно-симметричную систему координат θ, α, β , при этом, после соответствующей перестановки координат, окружной координатой принимается координата α . Параметры Ламе такой системы $h_\theta = h_\beta = h(\theta, \alpha), h_\alpha = H(\theta, \beta)$ [1].

В системах координат с осью сдвига θ, α, z справедливы формулы (1) и следующие равенства.

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2 = h^2; \\ b) \quad & \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{h^2} \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{h^2} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) = 0; \\ c) \quad & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{h^2} \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{h^2} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) = 0; \\ d) \quad & \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \alpha} \right) = 0; \\ e) \quad & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \alpha} \right) = 0; \end{aligned} \quad (1.2)$$

В системе вращательно-симметричных координат θ, α, β справедливы следующие равенства.

$$\begin{aligned}
a) & x = H \cos \alpha, y = H \sin \alpha; \\
b) & \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \beta} - \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0; \\
c) & \left(\frac{\partial H}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial \beta} \right)^2 = 0; \\
d) & \left(\frac{\partial h}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \beta} \right)^2 = h \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \beta^2} \right); \\
e) & \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial H}{\partial \beta} + \frac{\partial h}{\partial \beta} \frac{\partial H}{\partial \theta} = h \frac{\partial^2 H}{\partial \theta \partial \beta}; \\
f) & \frac{\partial h}{\partial \beta} \frac{\partial H}{\partial \beta} - \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial H}{\partial \theta} = h \frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial \beta}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Полный комплект соотношений типа (1.2) и (1.3) приведен в [2].

К важнейшим системам координат с осью сдвига принадлежат

1. Декартовы координаты x, y, z .

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad -\infty < z < \infty; \quad x = \theta, \quad y = \alpha, \quad h = 1.$$

2. Круговые цилиндрические координаты r, α, z .

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty; \quad r = \theta, \quad r \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \theta};$$

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha, \quad h = r.$$

3. Цилиндро-эллиптические координаты θ, α, z .

$$0 \leq r < \infty, \quad -\pi \leq \alpha < \pi, \quad -\infty < z < \infty; \quad \text{или} \quad -\infty < \theta < \infty, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi, \quad -\infty < z < \infty;$$

$$x = c \cdot ch\theta \cdot \cos \alpha, \quad y = c \cdot sh\theta \cdot \sin \alpha, \quad h = \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{ch2\theta - \cos 2\alpha}.$$

4. Цилиндро-параболические координаты θ, α, z .

$$-\infty < \theta < \infty, \quad 0 \leq \alpha \leq \infty, \quad -\infty < z < \infty;$$

$$x = c \frac{\theta^2 - \alpha^2}{2}, \quad y = c \cdot \theta \cdot \alpha, \quad h = c \sqrt{\theta^2 + \alpha^2}.$$

5. Цилиндро-биполярные координаты θ, α, z .

$$-\infty < \theta < \infty, \quad -\pi \leq \alpha \leq \pi, \quad -\infty < z < \infty;$$

$$x = \frac{c \cdot sh \theta}{ch\theta + \cos \alpha}, \quad y = \frac{c \cdot \sin \alpha}{ch\theta + \cos \alpha}, \quad h = \frac{c}{ch\theta + \cos \alpha}$$

или

$$x = \frac{c \cdot \sin \alpha}{ch\theta - \cos \alpha}, \quad y = \frac{c \cdot sh \theta}{ch\theta - \cos \alpha}, \quad h = \frac{c}{ch\theta - \cos \alpha}.$$

В Цилиндро-эллиптических, цилиндро-параболических и цилиндро-биполярных координатах с –масштабный множитель. Координатная линия α в системах с номерами 2,3 и 5 замыкается. Такие системы координат будем называть сз координатами, где аббревиатура основывается на словах „сдвиг“ и „замыкание“.

К важнейшим системам координат с осью вращения принадлежат следующие координаты.

1. Круговые цилиндрические координаты r, α, z .

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty; \quad r = \theta, \quad z = -\beta;$$

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha, \quad h = 1, \quad H = r.$$

1. Сферические координаты r, α, β .

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad 0 \leq \beta \leq \pi; \quad r \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \theta};$$

$$x = r \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta, \quad y = r \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta, \quad z = r \cdot \cos \beta, \quad h = r, \quad H = r \cdot \sin \beta.$$

2. Эллипсоидальные вытянутые координаты θ, α, β .

$$0 \leq \theta < \infty, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad 0 \leq \beta \leq \pi;$$

$$x = c \cdot \operatorname{sh} \theta \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta, \quad y = c \cdot \operatorname{sh} \theta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta, \quad z = c \cdot \operatorname{ch} \theta \cdot \cos \beta,$$

$$h = \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\operatorname{ch} 2\theta - \cos 2\beta}, \quad H = c \cdot \operatorname{sh} \theta \cdot \sin \beta.$$

4. Эллипсоидальные сплюснутые координаты θ, α, β .

$$0 \leq \theta < \infty, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad 0 \leq \beta \leq \pi;$$

$$x = c \cdot \operatorname{ch} \theta \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta, \quad y = c \cdot \operatorname{ch} \theta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta, \quad z = c \cdot \operatorname{sh} \theta \cdot \cos \beta,$$

$$h = \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\operatorname{ch} 2\theta + \cos 2\beta}, \quad H = c \cdot \operatorname{ch} \theta \cdot \sin \beta.$$

5. Параболоидальные координаты θ, α, β .

$$0 \leq \theta < \infty, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad 0 \leq \beta < \infty;$$

$$x = c \cdot \theta \cdot \beta \cdot \cos \alpha, \quad y = c \cdot \theta \cdot \beta \cdot \sin \alpha, \quad z = c \cdot \frac{\theta^2 - \beta^2}{2},$$

$$h = c \sqrt{\theta^2 + \beta^2}, \quad H = c \cdot \theta \cdot \beta.$$

6. Тороидальные координаты θ, α, β .

$$0 \leq \theta < \infty, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad -\pi \leq \beta \leq \pi;$$

$$x = \frac{c \cdot \operatorname{sh} \theta \cdot \cos \alpha}{\operatorname{ch} \theta - \cos \beta}, \quad y = \frac{c \cdot \operatorname{sh} \theta \cdot \sin \alpha}{\operatorname{ch} \theta - \cos \beta}, \quad z = \frac{c \cdot \cos \beta}{\operatorname{ch} \theta - \cos \beta},$$

$$h = \frac{c}{\operatorname{ch} \theta - \cos \beta}, \quad H = \frac{c \cdot \operatorname{sh} \theta}{\operatorname{ch} \theta - \cos \beta}.$$

7. Бисферические координаты θ, α, β .

$$0 \leq \theta < \infty, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad -\infty \leq \beta \leq \infty;$$

$$x = \frac{c \cdot \sin \theta \cdot \cos \alpha}{\operatorname{ch} \beta - \cos \theta}, \quad y = \frac{c \cdot \sin \theta \cdot \sin \alpha}{\operatorname{ch} \beta - \cos \theta}, \quad z = \frac{c \cdot \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{ch} \beta - \cos \theta},$$

$$h = \frac{c}{\operatorname{ch} \beta - \cos \theta}, \quad H = \frac{c \cdot \sin \theta}{\operatorname{ch} \beta - \cos \theta}.$$

В этих системах координат, также как и в предыдущих системах, c - масштабный множитель.

Основные уравнения и постановка задач при динамическом, чистом сдвиге упругих тел

Рассмотрим в системах координат с осью сдвига упругое динамическое равновесие изотропного тела с упругими характеристиками μ и λ , ограниченного плоскостями $z = 0$, $z = z_1$ и кусочно-гладкой цилиндрической поверхностью Π , которая состоит из координатных поверхностей $\theta = \theta_i$ и $\alpha = \alpha_i$,

$$\text{где } i=1,2. \text{ Заметим, что } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \text{ или } \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad E = \frac{\mu(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu};$$

E - модуль упругости, ν - коэффициент Пуассона, λ - модуль сдвига, λ - коэффициент податливости.

Пусть при $z = 0$, $z = z_1$: $u_\theta = 0$, $u_\alpha = 0$, $\sigma_z = 0$, а на поверхности Π отличной от нуля является только лишь та составляющая вектора внешнего напряжения или вектора смещения которая направлена вдоль z ; составляющая эта не должна зависеть от z . u_θ и u_α - компоненты вектора смещения вдоль касательных к координатным линиям $\theta = \theta_0$ и $\alpha = \alpha_0$, σ_z - нормальная к плоскости $z = \text{const}$ напряжение. Что касается вектора массовых сил, то отличной от нуля является лишь его проекция на z ; проекция эта не должна зависеть от координаты z .

Изложенное выше соответствует динамическому чистому сдвигу в упругом теле (динамическое антиплоское напряженное состояние)[3].

Будем считать, что

$$u_\theta = 0, \quad u_\alpha = 0, \quad u_z = u_z(\theta, \alpha, t)$$

где u_z - компонент вектора смещения вдоль координаты z , t - время. В этом случае из компонент тензора напряжения

$$T_n = \begin{pmatrix} \sigma_\theta & \tau_{\theta\alpha} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{\alpha\theta} & \sigma_\alpha & \tau_{\alpha z} \\ \tau_{z\theta} & \tau_{z\alpha} & \sigma_z \end{pmatrix},$$

где σ_θ , σ_α , σ_z и $\tau_{\theta\alpha} = \tau_{\alpha\theta}$, $\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta}$, $\tau_{z\alpha} = \tau_{\alpha z}$, соответственно нормальные и касательные напряжения, останутся лишь касательные напряжения

$$\tau_{\theta z} = \frac{\mu}{h} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \text{ и } \tau_{z\alpha} = \frac{\mu}{h} \frac{\partial u_z}{\partial \alpha}, \quad (2.1)$$

А из уравнений движения, лишь уравнение

$$\frac{\partial(h\tau_{\theta z})}{\partial \theta} + \frac{\partial(h\tau_{\theta\alpha})}{\partial \alpha} - h^2 \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = -h^2 Z(\theta, \alpha, t), \quad (2.2)$$

где ρ – плотность тела ($\rho > 0$), а $Z(\theta, \alpha, t)$ – массовая (объемная) сила [4]. Из (2.1) следует

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{h\tau_{z\theta}}{\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h\tau_{z\alpha}}{\mu} \right) = 0. \quad (2.3)$$

Из (2.1) и (2.2) следует

$$\begin{aligned} a) \mu \operatorname{divgrad} u_z - \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= -Z, \\ b) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha^2} - \frac{h^2 \rho}{\mu} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= -\frac{h^2}{\mu} Z. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Естественно, к приведенным уравнениям добавляются граничные и начальные условия.

Введем обозначения $h\tau_{z\theta} = \tau_\theta$, $h\tau_{z\alpha} = \tau_\alpha$, $u_z = \frac{aw}{G}$, где $G = \sqrt{\mu}$, $a = \text{const}$ ($a > 0$) тогда (2.2), (2.3), (2.1), (2.4) примут, соответственно, вид:

$$a) \frac{\partial \tau_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{ah^2 \rho}{\theta} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -h^2 Z, \quad (2.5)$$

$$b) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\tau_\alpha}{G^2} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_\theta}{G^2} \right) = 0; \tau_\theta = aG^2 \frac{\partial}{\partial \theta}, \tau_\alpha = aG^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{w}{G} \right);$$

$$a) \operatorname{divgrad} w - \frac{\rho}{G^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{1}{aG} Z, \text{ или } (2.7)$$

$$b) \Delta w - \frac{\rho}{G^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{1}{aG} Z, \text{ или}$$

$$c) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{h\rho}{G} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{h^2}{aG} Z,$$

$$\text{где } \operatorname{divgrad} \dots = \Delta \dots = \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right).$$

Перейдем к постановке задач на множестве $\Omega \times \tau$, где $\Omega = \{\theta < \theta < \theta, \alpha < \alpha < \alpha\}$, а $\tau = (0, \tau)$ – конечный или бесконечный (если $\tau = (0, \infty)$) промежуток времени.

На множестве $\Omega \times \tau$ следует найти функцию $w = w(\theta, \alpha, t)$, удовлетворяющую уравнению (2.7) и условиям:

$$\begin{aligned} a) \gamma_{i1}(\alpha) \frac{\partial w}{\partial \theta} + \gamma_{i2}(\alpha) \cdot w &= f_{i1}(\alpha, t) & \text{при } \theta = \theta_i, \\ b) \gamma_{i1}(\theta) \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \tilde{\gamma}_{i2}(\theta) \cdot w &= f_{i2}(\theta, t) & \text{при } \alpha = \alpha_i, \\ c) w|_{t=0} &= F_1(\theta, \alpha) \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = F_2(\theta, \alpha). \end{aligned} \quad (2.8)$$

В сз координатах когда $0 < \alpha < 2\pi$ или $-\pi < \alpha < \pi$, условия (2.8b) заменяются условиями периодичности. Здесь $i=1,2$; γ_{ij} , $\tilde{\gamma}_{ij}$, f_{ij} , F_1 , F_2 – заданные функции, естественно, $\gamma_{i1}^2 + \gamma_{i2}^2 \neq 0$, $\tilde{\gamma}_{i1}^2 + \tilde{\gamma}_{i2}^2 \neq 0$. В угловых точках области (при наличии таких точек) выполняются условия согласования. Выполняются условия согласования и по времени, т.е. при $t=0$. $F_1(\theta, \alpha)$ – решение задачи (2.7), (2.8a,b), а $F_2(\theta, \alpha)$ – решение задачи $(2.7)_t$, $(2.8a,b)_t$, где индекс t означает дифференцирование t по уравнения и условия. Заметим, что условия (2.8a,b), обеспечивает при $\theta = \theta_i$ и $\alpha = \alpha_i$, задание смещения, -напряжения либо их сочетания.

При рассмотрении кусочно-однородного многослойного тела, будем предполагать, что упругие однородные слои контактируют по цилиндрическим поверхностям $\theta = \text{const}$ или $\alpha = \text{const}$. Если, например, контактные поверхности $\theta = \theta_{\bar{s}}$, где $\bar{s}$ номер контактной поверхности, причем $\bar{s}=2,3,4,\dots,l$, а l – количество слоев ($\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_{l+1}$ – граничные поверхности), то для каждого слоя

$$\tilde{\gamma}_{i1}(\theta) \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \tilde{\gamma}_{i2}(\theta) \cdot w = f_{2i}(\theta, t) \quad \text{при } \alpha = \alpha_i; \quad (2.9)$$

В сз координатах, когда $0 < \alpha < 2\pi$ или $-\pi < \alpha < \pi$, условия (2.9) заменяются условиями периодичности. Здесь s – номер слоя, причем $s=1, 2, 3, \dots, l$. Предполагается выполнение условий согласования в угловых точках областей $\Omega_s = \{\theta_s < \theta < \theta_{s+1}, \alpha_1 < \alpha < \alpha_2\}$ и условий согласования по времени; на функцию Z_s при $\alpha = \alpha_i$ накладываются те же требования, что и на W_s .

На граничной поверхности $\theta = \theta_1$

$$\gamma_{11}(\alpha) \frac{\partial w_1}{\partial \theta} + \gamma_{12}(\alpha) \cdot w_1 = f_{11}(\alpha, t); \quad (2.10)$$

На граничной поверхности $\theta = \theta_{l+1}$

$$\gamma_{21}(\alpha) \frac{\partial w_l}{\partial \theta} + \gamma_{22}(\alpha) \cdot w_l = f_{12}(\alpha, t); \quad (2.11)$$

На контактных поверхностях $\theta = \theta_{\bar{s}}$

$$w_{\bar{s}-1} - w_{\bar{s}} = \eta_{1\bar{s}}(\alpha, t) \quad \text{и} \quad \tau_{\theta(\bar{s}-1)} - \tau_{\theta\bar{s}} = \eta_{2\bar{s}}(\alpha, t); \quad (2.12)$$

Начальные условия примут вид:

$$w_s|_{t=0} = F_{1s}(\theta, \alpha), \quad \left. \frac{\partial w_s}{\partial t} \right|_{t=0} = F_{2s}(\theta, \alpha). \quad (2.13)$$

В правых частях равенств стоят заданные функции.

Постановка задачи для указанного многослойного тела формулируется следующим образом.

Следует найти функцию

$$w = \begin{cases} w_1 & \text{на множестве } \Omega_1 \times \tau_1, \\ w_2 & \text{на множестве } \Omega_2 \times \tau_2, \\ \dots & \dots \\ w_l & \text{на множестве } \Omega_l \times \tau_l, \end{cases} \quad (2.14)$$

такую, что на множестве удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 w_s}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial \alpha^2} - \frac{h^2 \rho}{G_s^2} \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} = - \frac{h^2}{a_s G_s} Z_s \quad (2.15)$$

и условиям (2.9)-(2.13), когда $s = 1, 2, 3, \dots, l$ (точнее, 1-ой слой удовлетворяет условиям (2.9), (2.10), (2.12), (2.13), l -ый слой- условиям (2.9), (2.11), (2.12), (2.13), а остальные слои- условиям (2.9), (2.12), (2.13)).

Поставленные задачи сформулированы в общем виде и не накладывалось никаких условий на внешние данные, равно как и не было указано, в каком классе функций ищется w . Все это целесообразно делать при постановке конкретных задач.

Заметим, что если рассматривается статическая задача об упругом чистом сдвиге $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \right)$

и на контуре области задаются напряжения, тогда, как это следует из (2.5), задача становится статически определимой, т.е. решается в напряжениях (определяется из (2.6)) и вообще говоря, справедлива теорема Леви-Мичела, поэтому статическую задачу можно решать как в напряжениях (с введением функций напряжения) так и в смещениях. Целесообразность применения того или другого подхода зависит от граничных условий.

Заключение

Предложенный метод безо всякого изменения может быть использован для решения динамических задач теории упругости связанных с чистым кручением, плоско - деформированным и осесимметричным напряженным состоянием. Предлагаемый метод можно применить и для построения общего решения в системах координат с осью сдвига и в сферических координатах.

Список литературы:

1. Г. Арфкен, Математические методы в физике, Москва, 1970.
2. В. В. Новацкий, Теория упругости, Москва: Судпромгиз, 1958.
3. Ю. Н. Работнов, Механика деформируемого твердого тела; Москва: Наука, 1988.