

ABOUT ONE PROBLEM FOR A RECTANGULAR SLAB

Tsitskishvili Z.,

Academically Doctor of Mathematical Sciences, Professor

Museridze R.,

Academic Doctor of Construction Sciences, assistant professor.

Chkheta V.,

PhD student. Georgian Technical University

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ

Цицкишвили З.А.

академически доктор математических наук, профессор

Мусеридзе Р.Р.

*академический доктор строительных наук,**асистент-профессор*

Чхетия В.Р.

*студент**(Грузинский технический университет)*<https://doi.org/10.5281/zenodo.10451496>**Abstract**

Determining the complete picture of the stress-strain state (SSS) of massive elements (bodies whose overall dimensions are of the same order) requires the use of three-dimensional models.

A special case of a massive element—a parallelepiped-shaped plate—is one of the most common objects used in technology.

A large number of works have been devoted to the problem of the equilibrium of a loaded elastic parallelepiped, but it remains relevant to the present day, since a closed solution has not yet been obtained.

Existing analytical solutions for three-dimensional problems of the theory of elasticity do not allow satisfying arbitrary boundary conditions on the faces of a parallelepiped.

In the work under consideration, for one class of boundary value problems using the method of separation of variables and double series, solutions to static boundary value problems of thermoelasticity for a rectangular coordinate parallelepiped are constructed.

Аннотация

Определение полной картины напряжённо-деформированного состояния (НДС) массивных элементов (тел, габаритные размеры которых имеют один порядок) требует использования трёхмерных моделей.

Частный случай массивного элемента — плита в форме параллелепипеда — является одной из самых распространённых объектов, применяемых в технике.

Задаче о равновесии нагруженного упругого параллелепипеда посвящено большое количество работ, но она остаётся актуальной по настоящее время, поскольку замкнутого решения до сих пор не получено.

Существующие аналитические решения для трёхмерных задач теории упругости не позволяют удовлетворять произвольным граничным условиям на гранях параллелепипеда.

В рассматриваемой работе для одного класса граничных задач с использованием метода разделения переменных и двойных рядов, строятся решения статических граничных задач термоупругости [1] для прямоугольного координатного параллелепипеда.

Keywords: boundary value problem of thermoelasticity, stress-strain state, isotropic plate, equilibrium equations (without taking into account body forces), Equation of state (physical law or Hooke's law), heat equation, Sturm-Liouville problem, method of separation of variables, double series, convergence.

Ключевые слова: граничная задача термоупругости, напряжённо-деформированное состояние, изотропная плита, уравнения равновесия (без учета объемных сил), Уравнение состояния (физический закон или закон Гука), уравнение теплопроводности, задачи Штурма-Лиувилля, метода разделения переменных, двойные ряды, сходимость.

Рассмотрим прямоугольную плиту, которая занимает область

$$\Pi = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1, z_0 < z < z_1\}, \text{ где } x, y, z - \text{прямоугольные координаты.}$$

При $z = 0$ и $z = z_1$ вместе с температурным возмущением задаются либо напряжения, либо смещения, либо их сочетания. На боковых граничных ($x = x_0, x = x_1, y = y_0, y = y_1$) задаются однородные граничные условия специального вида.

Если температурное поле не зависит от времени, а массовые силы отсутствуют, тогда упругое равновесие изотропного тела в декартовой прямоугольной системе координат описывается следующими уравнениями [1,2].

1. Уравнения равновесия (без учета объемных сил)

$$\left. \begin{aligned} a) \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ b) \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial S_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial x} &= 0, \\ c) \frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{\partial S_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{zy}}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где N_x, N_y, N_z – нормальные напряжения, $S_{xy} = S_{yx}, S_{xz} = S_{zx}, S_{yz} = S_{zy}$ касательные напряжения.

2. Уравнение состояния (физический закон или закон Гука)

$$\left. \begin{aligned} N_x &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{zz} - \beta_0 T = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\frac{\partial w}{\partial z} - \beta_0 T \\ N_y &= \lambda\varepsilon_{xx} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{zz} - \beta_0 T = \lambda\frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\frac{\partial w}{\partial z} - \beta_0 T; \\ N_z &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz} - \beta_0 T = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial w}{\partial z} - \beta_0 T; \\ S_{yz} &= \mu\varepsilon_{yz} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right); \\ S_{xz} &= \mu\varepsilon_{xz} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right); \\ S_{xy} &= \mu\varepsilon_{xy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где u, v, w компоненты вектора смещения $\vec{U}$ вдоль координатных линии x, y, z ; $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$ – деформации; λ и μ упругие характеристики (их выражения через технические характеристики E и ν смотри в [1]); $T = \tilde{T} - T_0$ – относительная температура, $\tilde{T}$ – абсолютная температура, T_0 – начальная температура; $\beta_0 = \frac{E\alpha_T}{1 - 2\nu}$, α_T – линейный коэффициент теплового расширения.

3. Уравнение теплопроводности [3]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad (3)$$

λ – коэффициент теплопроводности. Верхний индекс T указывает, что соответствующие должны быть экспериментально определены при постоянном температурном (T) поле, а также при постоянном уровне деформации.

Пусть изотропная плита, ограниченная плоскостями декартовой, прямоугольной систем координат $Oxyz$, занимает область $\Pi = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1, z_0 < z < z_1\}$. Граничные условия, которые фигурируют при постановке граничных задач имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } x = x_i: \quad a) \frac{\partial T}{\partial x} = 0, u = 0, S_{xy} = 0, S_{xz} = 0, \text{ или} \\ b) T = 0, N_x = 0, v = 0, w = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } y = y_i: a) \frac{\partial T}{\partial y} = 0, v = 0, S_{yx} = 0, S_{yz} = 0, \text{ или} \\ b) T = 0, N_y = 0, u = 0, w = 0 \end{array} \right\}, \quad (5)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } z = z_i: a) w = f_1(x, y), u = f_2(x, y), v = f_3(x, y) \text{ или} \\ b) N_z = F_1(x, y), S_{zx} = F_2(x, y), S_{zy} = F_3(x, y) \text{ или} \\ c) w = f_1(x, y), S_{zx} = F_2(x, y), S_{zy} = F_3(x, y) \text{ или} \\ d) N_z = F_1(x, y), u = f_2(x, y), v = f_3(x, y) \end{array} \right\}. \quad (6)$$

$$\text{при } z = z_i: a) T = t(x, y), \text{ или } b) \frac{\partial T}{\partial z} = \tilde{t}(x, y) \text{ или } c) \frac{\partial T}{\partial z} + \Theta_i T = \tilde{t}(x, y) \quad (7)$$

Здесь $i = 0, 1$, причём $z_0 = 0$: Θ_i – заданные постоянные. Функции заданные на гранях плиты таковы, что на ребрах плиты выполняются условия согласования.

Введем обозначения:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\beta}{\lambda + 2\mu} T = \frac{K}{\lambda + 2\mu}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu} B, \quad (8)$$

тогда систему (1) можно переписать в следующем виде[4]:

$$\begin{aligned} a) \frac{\partial K}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ b) \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\partial S_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ c) \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial z} + \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda} \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{2\mu\beta}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial z}, \\ d) \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Используя (2) и (7) легко показать, что равенство (8a) является тождеством. Т.к. в дальнейшем при решении граничных задач рассматриваемых в настоящей работе применяем метод разделения переменных, граничные условия представим в следующем образом:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } z = z_i: a) w = f_{i1}(x, y), \Gamma_1(u, v) = \tilde{f}_{i2}(x, y), \Gamma_2(v, u) = \tilde{f}_{i3}(x, y) \text{ или} \\ b) N_z = F_{i1}(x, y), \Gamma_1(S_{zx}, S_{zy}) = \tilde{F}_{2i}(x, y), \Gamma_2(S_{zy}, S_{zx}) = \tilde{F}_{3i}(x, y) \text{ или} \\ c) w = f_{i1}(x, y), \Gamma_1(S_{zx}, S_{zy}) = \tilde{F}_{2i}(x, y), \Gamma_2(S_{zy}, S_{zx}) = \tilde{F}_{3i}(x, y) \text{ или} \\ d) N_z = F_{i1}(x, y), \Gamma_1(u, v) = \tilde{f}_{i2}(x, y), \Gamma_2(v, u) = \tilde{f}_{i3}(x, y), \end{array} \right\} \quad (10)$$

$$\text{где } \Gamma_1(g_1, g_2) = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y}, \Gamma_2(g_2, g_1) = \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y}, \text{ при этом } g_1 = S_{zx} \text{ или } g_1 = u, g_2 = S_{zy}$$

или $g_2 = v$. Примем, что функции $\tilde{F}_{2i}(x, y), \tilde{F}_{3i}(x, y)$ сами, — $F_{i1}(x, y), \tilde{f}_{i2}(x, y)$ и $\tilde{f}_{i3}(x, y)$ функции вместе со своими первыми, — а $f_{i1}(x, y)$ функции в месте со своими первой и второй производными разлагаются в абсолютно и равномерно сходящиеся ряды Фурье по собственным функциям задачи[6]:

$$\Delta_2 \psi_{mn} + p^2 \psi_{mn} = 0; \quad (11)$$

$$\text{при } x = x_i: a) \psi_{mn} = 0 \text{ или } b) \frac{\partial \psi_{mn}}{\partial x} = 0, \quad (12)$$

$$\text{при } y = y_i: a) \psi_{mn} = 0 \text{ или } b) \frac{\partial \psi_{mn}}{\partial y} = 0. \quad (13)$$

Далее, в работе [5] показано, что в термически однородной среде функцию T в области $\Pi = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1, z_0 < z < z_1\}$, используя метод Фурье, можно представить следующим виде

$$T = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 z + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(A_{Tmn} e^{-\tilde{p}n} + B_{Tmn} e^{-\tilde{p}(z-z_1)} \right) \psi_{mn}(x, y), \quad (14)$$

где $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \tilde{p} = \lambda^{0.5} p(m, n) \geq 0, A_{Tmn}, B_{Tmn}$ — постоянные; $\psi_{mn}(x, y)$ — нетривиальное решение соответствующей задачи Штурма-Лиувилля (см. (11)-(13)).

Следуя работе [4] для рассматриваемого класса Уравнение состояния (физический закон или закон Гука) для изотропной среды общее решение в классе регулярных функции можно представит в виде

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi_3 + \frac{1}{2\mu} \varphi_2 \right) + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \\ v &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi_3 + \frac{1}{2\mu} \varphi_2 \right) - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \\ w &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi_3 + \frac{1}{2\mu} \varphi_2 \right) + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ -решения соответствующих уравнений

$$\left. \begin{aligned} a) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \Delta_2 \varphi_1 &= 0, \\ b) \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} + \Delta_2 \varphi_3 &= 0, \\ c) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} + \Delta_2 \varphi_2 &= \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} + \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \beta_0 T. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Приняв во внимание, что $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu = \frac{E}{1+\nu}$, где E - модуль Юнга, а ν -коэффициент

Пуассона. Полагая $T = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2}$, третье уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} + \Delta_2 \varphi_2 = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} + \frac{E(1-\nu)}{1-2\nu} \beta_0 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2}. \quad (16')$$

Общее решение этого уравнения имеет следующий вид: $\varphi_2 = \bar{\Phi}_2 + \tilde{\Phi}_2$, где $\bar{\Phi}_2 = \frac{E}{2(1-\nu^2)} z \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{E(1-\nu)\beta_0}{2(1-2\nu)} z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z}$ частное решение данного уравнения, а $\tilde{\Phi}_2$ - общее решение уравнения $\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_2}{\partial z^2} + \Delta_2 \tilde{\Phi}_2 = 0$.

Представления решения задач термоупругости используя функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и T , позволяет аналитически выписать решения для целого ряда граничных задач.

Рассмотрим следующую граничную задачу. Пусть на плиту, занимающая область $\Pi = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1, z_0 < z < z_1\}$, воздействует температурное поле T , на его поверхности заданы следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} x = x_0 : T &= 0, K = 0, \nu = 0, w = 0, \\ \text{При } x = x_1 : \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, u = 0, B = 0, \tau_{xy} = 0; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{При } y = y_0 : \frac{\partial T}{\partial y} = 0, v = 0, B = 0, \tau_{xy} = 0, \\ y = y_1 : T = 0, K = 0, w = 0, u = 0; \end{aligned} \quad (18)$$

При $z = z_i (i = 0, 1)$:

$$w = f_{i1}(x, y), \quad \Gamma_1(u, v) = \tilde{f}_{i2}(x, y), \Gamma_2(v, u) = \tilde{f}_{i3}(x, y), T = t(x, y), \quad (19)$$

Тогда для нахождения упругого равновесия плиты, функциям T, φ_2, φ_3 и φ_1 придадим следующий вид:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p_T^2} \left(A_{Tmn} e^{-pz} + B_{Tmn} e^{-p(z-z_1)} \right) \cos(\bar{m}x) \sin(\bar{n}y), \\ \varphi_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(A_{1mn} e^{-pz} + B_{1mn} e^{-p(z-z_1)} \right) \sin(\bar{m}x) \cos(\bar{n}y), \\ \varphi_3 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(A_{3mn} e^{-p_1 z} + B_{3mn} e^{-p_1(z-z_1)} \right) \cos(\bar{m}x) \sin(\bar{n}y), \\ \varphi_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(A_{2mn} e^{-p_1 z} + B_{2mn} e^{-p_1(z-z_1)} \right) \cos(\bar{m}x) \sin(\bar{n}y), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{где } \bar{m} = \frac{m\pi}{2x_1}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad \bar{n} = \frac{n\pi}{2y_1}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots.$$

Выражения для смещений и напряжений можно записать следующим образом.

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial x} + \frac{E}{2(1-\nu)} z \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_3}{\partial x \partial z} + \frac{1-\nu^2}{1-2\nu} \beta_0 z \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x \partial z} + \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial y}, \\ v &= \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial y} + \frac{E}{2(1-\nu)} z \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_3}{\partial y \partial z} + \frac{1-\nu^2}{1-2\nu} \beta_0 z \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y \partial z} - \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial x}, \\ w &= -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial z} + \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial z} + \frac{1}{2(1-\nu)} z \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_3}{\partial z^2} + \frac{1-\nu^2}{2(1-2\nu)} \beta_0 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \frac{1-\nu^2}{2(1-2\nu)} \beta_0 z \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2}, \\ \Gamma_1(u, v) &= \frac{1+\nu}{E} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_2}{\partial y^2} \right) + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial y} \right) + \frac{1-\nu^2}{1-2\nu} \beta_0 z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \right), \\ \Gamma_2(v, u) &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2(1+\nu)}{E} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_1}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \right\}$$

Постоянные A_{lmn}, B_{lmn} с учетом (17)–(20) и последних формул, определяются из систем линейных алгебраических уравнений. Так например, для определения постоянных A_{1mn}, B_{1mn} получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} A_{1mn} + B_{1mn} e^{-pz_1} &= \frac{E}{2p(1+\nu)} \bar{f}_{0mn} \\ A_{1mn} e^{-pz_1} + B_{1mn} &= \frac{E}{2p(1+\nu)} \bar{f}_{1mn} \end{aligned} \right\}$$

где $\bar{f}_{0mn}$ и $\bar{f}_{1mn}$ соответственно, коэффициенты Фурье функции $\tilde{f}_{i3}(x, y)$ разложенных в ряд Фурье по функциям ψ_{mn} .

Несложно доказать и сходимость соответствующих функциональных рядов в замкнутой области $\bar{\bar{D}}$, построением сходящегося числового ряда, мажорирующего в $\bar{\bar{D}}$ эти функциональные ряды. Совершенно аналогично решаются и другие граничные задачи для плиты.

Список литературы:

1. Тимошенко С.М., Гудер Дж. - Теория упругости. Москва, "Наука", 1975.
2. Демидов С.П. - Теория упругости. Москва, "Высшая школа", 1979.
3. Коваленко А.О. - Основы термоупругости. Киев, "Наукова думка", 1970.
4. Горгидзе Д.А. Основные уравнения термоэлектроупругости и общие решения в обобщенных цилиндрических координатах//Труды международного симпозиума по проблемам механики сплошных сред. Тбилиси, 1997.
5. Khomasuridze N.G. Thermotlastic stresses of Mulltilaye Cylindrical Bodies.// Jornal of Thermal Stresses. 24 : 919-936,2001.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. - Уравнения математической физики, М., 1951.