

MATHEMATICAL SCIENCES

NUMBER SPIRALS

Khyzhniak M.

Independent researcher, Kryvyi Rih, Ukraine

ЧИСЛОВЫЕ СПИРАЛИ

Хижняк Н.Г.

Независимый исследователь, Кривой Рог, Украина

<https://doi.org/10.5281/zenodo.15024975>

Abstract

The proposed variants of number spirals are a representation of natural numbers on a spiral in units of measurement of angles. Following certain rules for placing numbers allows you to get an infinite spiral multiplication table for any natural number $a > 1$. The appearance and structure of a specific a -spiral will be the same for any units of measurement of angles in any number systems of natural numbers.

Аннотация

Предлагаемые варианты числовых спиралей – это представление натуральных чисел на спирали в единицах измерения углов. Соблюдение определенных правил размещения чисел позволяет получить бесконечную спиральную таблицу умножения для любого натурального числа $a > 1$. Внешний вид и структура конкретной **a -спирали** будут одинаковыми для любых единиц измерения углов в любых системах счисления натуральных чисел.

Keywords: natural numbers, number spirals, units of measurement of numbers, units of measurement of angles, rays, arcs, number systems, multiplication, addition, power of a number, positional number system, prime numbers.

Ключевые слова: натуральные числа, числовые спирали, единицы измерения чисел, единицы измерения углов, лучи, дуги, системы счисления, умножение, сложение, степень числа, позиционная система счисления, простые числа.

Введение

Визуальное изображение натуральных чисел известно давно и имеет вид **числового луча** (рис. 1).

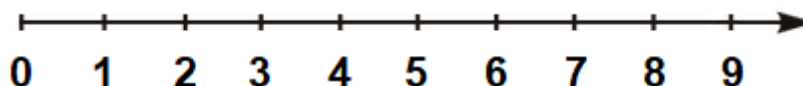


Рис.1 Числовой луч

Для визуализации чисел на числовом луче используются единицы измерения длины. Числовой луч начинается с нуля, поскольку иначе невозможно изобразить единичный отрезок как единицу измерения. Расстояния между числами одинаковые и равны единичному отрезку [1].

В 1963 году Станислав Улам предложил изображение натуральных чисел в виде спирали. Сегодня это визуальное представление натуральных чисел известно как **скатерть (или спираль) Улама** (рис. 2) [2].

37	36	35	34	33	32	31
38	17	16	15	14	13	30
39	18	5	4	3	12	29
40	19	6	1	2	11	28
41	20	7	8	9	10	27
42	21	22	23	24	25	26
43	44	45	46	47	48	49

Рис.2 Скатерть Улама

Двумерная плоскость разбита на квадраты одинакового размера. В центре спирали находится единица, вокруг неё в каждый квадрат вписывается одно натуральное число по спирали. Данная спираль построена без применения каких-либо единиц измерения, ноль отсутствует.

В 1994 году Роберт Сакс расположил натуральные числа по Архимедовой спирали (рис. 3) и получил спираль, известную сегодня как **спираль Сакса** [2].

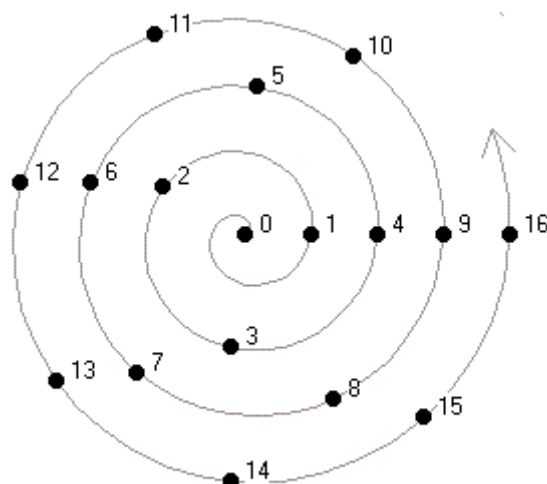


Рис.3 Спираль Сакса

Для построения спирали Сакс использовал единицы измерения углов для поворота и единицы измерения длины для определения расстояния от центра спирали до каждого натурального числа. В центре спирали расположен ноль единиц измерения длины, на нулевом луче единиц измерения углов Сакс расположил квадраты натуральных чисел.

Если для визуального отображения натуральных чисел использовать произвольную спираль и единицы измерения углов, тогда все числа можно упорядочить по следующим правилам:

1. На главной оси **а-спирали** располагаются числа вида a^n в порядке возрастания, где $a > 1$, $n \geq 0$.
2. Главная ось совпадает с нулевым лучом единиц измерения углов и имеет следующий вид (рис.4).

Числовые спирали

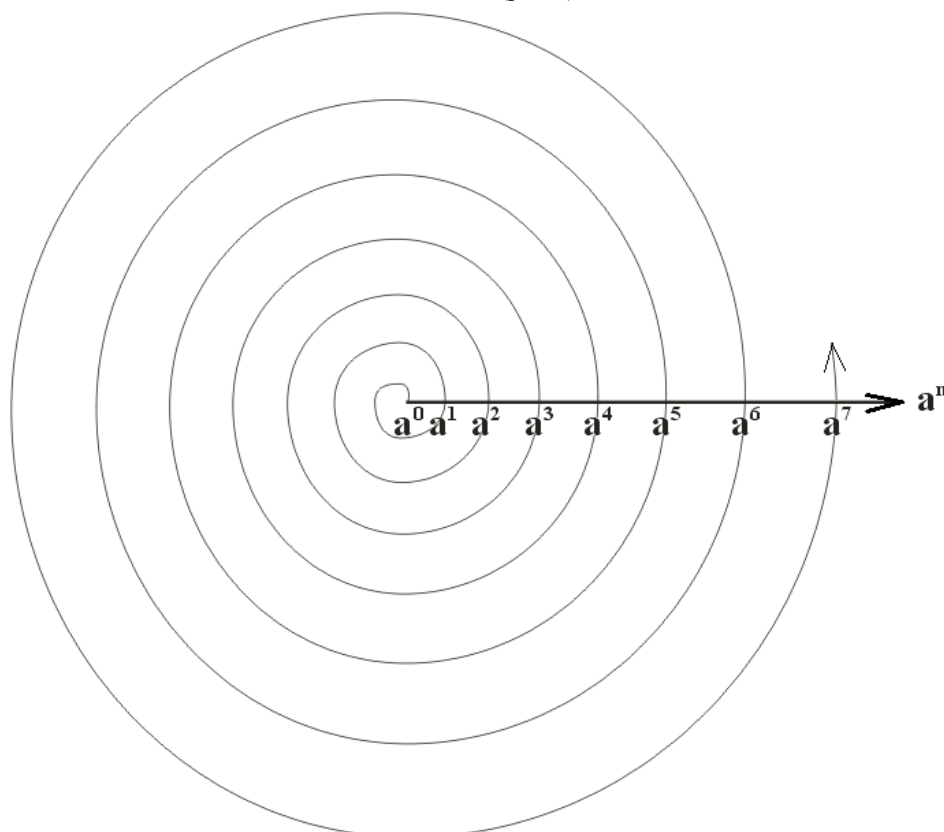


Рис.4 Главная ось числовой спирали

3. Главная ось делит спираль на отдельные витки размером в 360° , которые целесообразно нумеровать по показателю степени числа a , расположенного в начале каждого витка. Например, **а.0-виток**, **а.1-виток**, **а.п-виток**. Расстояние между витками спирали произвольное.

4. Каждый виток **а-спирали** разбивается лучами на равное количество единичных угловых секторов, которые делят виток на единичные дуги. Каждая единичная дуга имеет произвольную длину и соответствует одной числовой единице. Единичные дуги разделяют два соседних натуральных числа, которые располагаются на пересечениях лучей и витков спирали.

5. Количество единичных секторов и количество натуральных чисел m_n для каждого **а.п-витка** определяется по формуле:

$$m_n = a^{n+1} - a^n = a^n(a-1) \quad (1)$$

6. Для нулевых витков всех **а-спиралей** количество единичных секторов и натуральных чисел имеет вид:

$$m_0 = a^0(a-1) = a-1 \quad (2)$$

7. Каждая единичная дуга из витка m_n на следующем витке m_{n+1} делится на a единичных дуг новыми лучами.

8. В начале каждого луча (**Н-луч**), на пересечении с витком, расположено натуральное число **N** вида P_a , простое по отношению к числу a .

9. На продолжении **Н-лучей**, в точках пересечения с последующими витками, располагаются натуральные числа, кратные числу a , образующему главную ось **а-спирали**.

Описание числовых спиралей

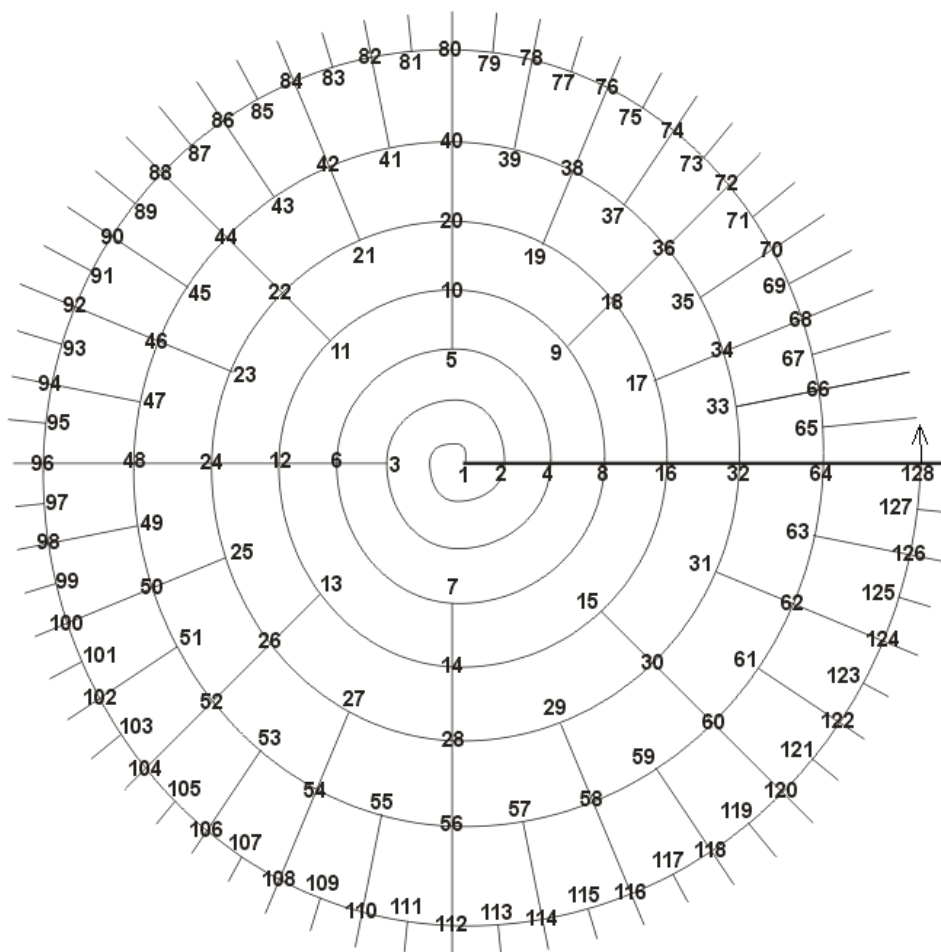


Рис.4 2-спираль

На **2-спирали** (рис. 4) главная ось образуется последовательными степенями числа 2. Все нечетные числа располагаются в начале числовых **Н-лучей**, все четные числа расположены на **Н-лучах** спирали.

На **2.0-витке** находится одна единичная дуга размером 360° , в начале этого витка находится число 1. Это единственная числовая спираль, у которой на нулевом витке нет других чисел, кроме единицы. Количество чисел и единичных дуг определяется по формуле (2):

$$m_0 = a - 1 = 2 - 1 = 1$$

2.1-виток разбивается на две единичные дуги размером 180° и на нем расположено два числа – 2

и 3. Здесь и на остальных витках количество чисел и единичных дуг определяется по формуле (1):

$$m_1 = a^1(a-1) = 2(2-1) = 2$$

2.2-виток образуют четыре единичные дуги размером 90° , на котором располагаются числа 4, 5, 6, 7.

$$m_2 = a^2(a-1) = 4(2-1) = 4$$

2.3-виток образуют 8 единичных дуг размером 45° .

$$m_3 = a^3(a-1) = 8(2-1) = 8$$

На этом витке расположены числа с 8 по 15 включительно. Числа 10, 12 и 14 расположены на продолжении 5-луча, 3-луча и 7-луча соответственно.

Дальнейшее расположение натуральных чисел на **2-спирали** можно проследить на рисунке.

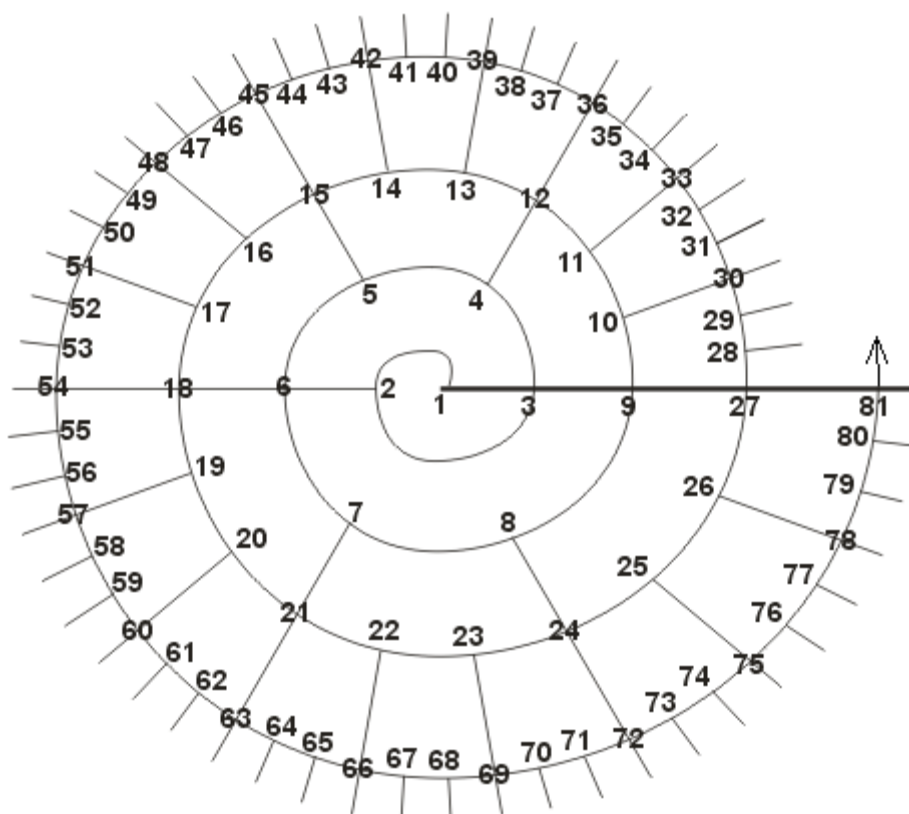


Рис.5 3-спираль

Главную ось **3-спирали** (рис. 5) образуют последовательные степени числа 3. На **3.0-витке** находится две единичные дуги размером 180° и на нем расположено два числа – 1 и 2. Формула (2) имеет следующий вид:

$$m_0 = a - 1 = 3 - 1 = 2$$

3.1-виток разбивается на шесть единичных дуг размером 60° , на нем располагаются числа 3, 4, 5, 6, 7 и 8. Формула (1) выглядит так:

$$m_1 = a^1(a-1) = 3(3-1) = 6$$

Число 6 находится на продолжении **2-луча** и является результатом умножения числа 2 на число 3.

3.2-виток образуют восемнадцать единичных дуг размером 20° , на нем располагаются числа с 9 по 26.

$$m_2 = a^2(a-1) = 9(3-1) = 18$$

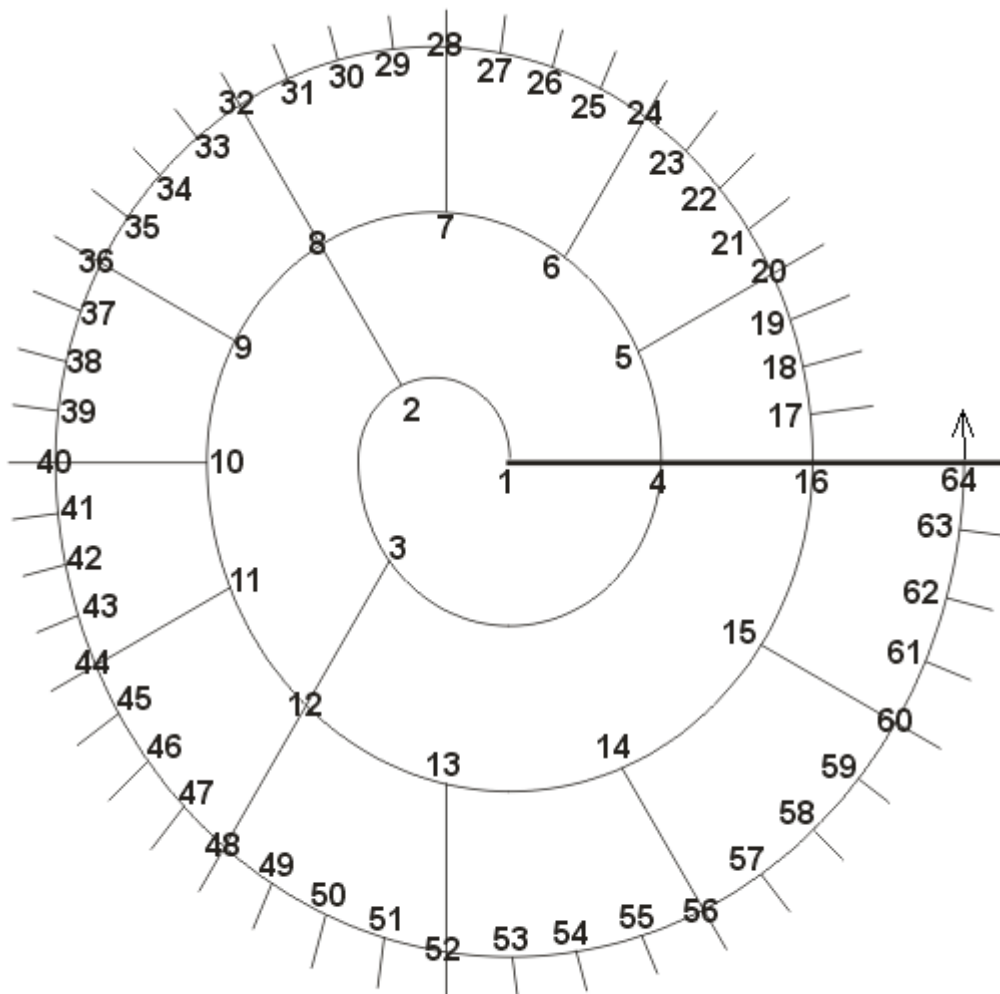


Рис.6 4-спираль

Главную ось **4-спирали** (рис. 6) образуют последовательные степени числа 4. На **4.0-витке** находится три единичные дуги размером 120° и на нем расположено три числа – 1, 2 и 3:

$$m_0 = a - 1 = 4 - 1 = 3$$

4.1-виток разбивается на двенадцать единичных дуг размером 30° :

$$m_1 = a^1(a-1) = 4(4-1) = 12$$

4.2-виток разбивается на сорок восемь единичных дуг размером $7,5^\circ$:

$$m_2 = a^2(a-1) = 16(4-1) = 48$$

Каждый виток **4-спирали** содержит в себе два сжатых витка **2-спирали**. Сжатие происходит неравномерно и задается структурой нулевого витка

4-спирали. Нулевой и четные витки **2-спирали** сжимаются до $1/3$ витка **4-спирали**, первый и нечетные витки – до $2/3$. Такое неравномерное сжатие обеспечивает равенство единичных угловых сегментов всех витков в структуре **4-спирали**.

Подобное неравномерное сжатие происходит и на остальных спиралях, построенных на числах, равных степени числа a , больше первой степени. Так, для **8-спирали** ($a=2^3$), каждый виток которой содержит три витка **2-спирали**, пропорции равны: $1/7, 2/7, 4/7$.

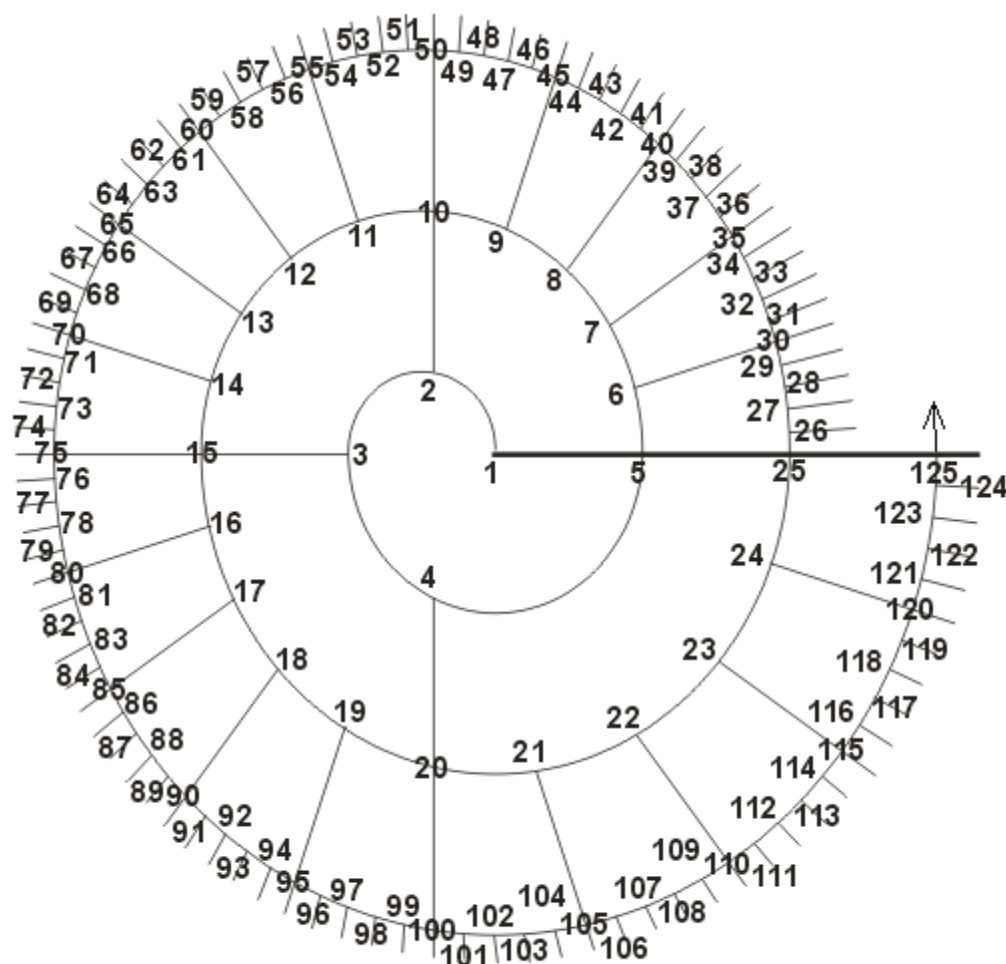


Рис. 7 5-спираль

Главную ось 5-спирали (рис. 7) образуют последовательные степени числа 5. На 5.0-витке находится четыре единичные дуги размером 90° и на нем расположено четыре числа – 1, 2, 3 и 4:

$$m_0 = a - 1 = 5 - 1 = 4$$

5.1-виток разбивается на двадцать единичных дуг размером 18° :

$$m_1 = a^1(a-1) = 5(5-1) = 20$$

5.2-виток разбивается на сто единичных дуг размером $3,6^\circ$:

$$m_2 = a^2(a-1) = 25(5-1) = 100$$

Подобным образом можно построить числовую спираль для любого натурального числа.

Анализ числовых спиралей

Движение вдоль витков любой **а-спирали** является таблицей сложения с последовательным добавлением одной единицы к предыдущему числу, начиная с единицы. Движение вдоль лучей любой **а-спирали** является таблицей умножения с последовательным умножением числа, расположенного

в начале луча, на число **а**. Если двигаться от меньших чисел к большим вдоль витков спирали, мы получим направление движения при математической операции сложения. Если двигаться от меньших чисел к большим вдоль лучей, мы получим направление движения при умножении. Эти два движения перпендикулярны, что свидетельствует о принципиальном различии сложения и умножения [3, стр.36]. **Сложение и умножение являются перпендикулярными математическими действиями.**

Если провести ось симметрии через главную ось любой **а-спирали**, тогда симметричные числа на витках образуют суммы разложения [4, стр. 24]. Для любого **а.п-витка** эта сумма разложения равна $a^n + a^{n+1}$. Для примера суммы разложения показаны на 4.1-витке (рис.8). Количество таких сумм, учитывая сумму чисел a^n и a^{n+1} на главной оси, равно $m_0/2$.

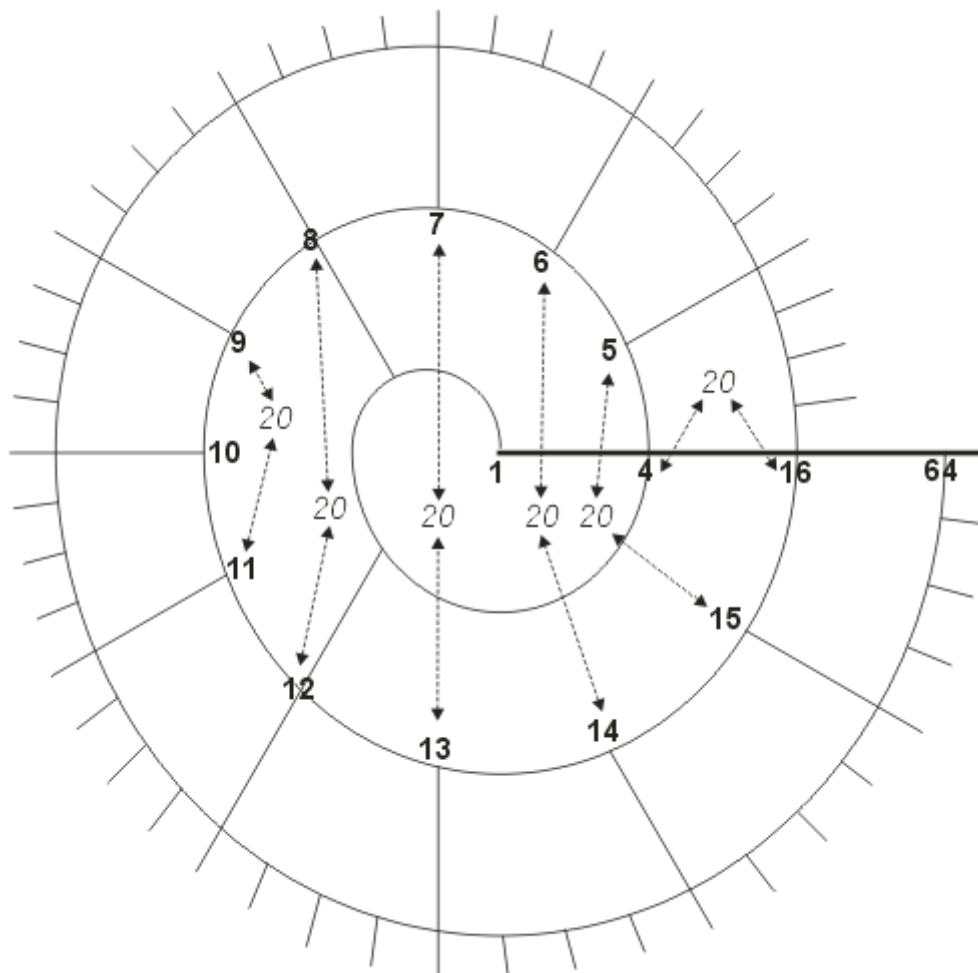


Рис.8 Суммы разложения

Данное свойство числовых спиралей позволяет вычислить сумму натуральных чисел, расположенных на одном **а.п-витке**. Для этого необходимо сумму разложения умножить на количество

таких сумм, используя формулу (1), добавить число, расположенное на оси симметрии, которое равно половине суммы разложения и вычесть число a^{n+1} , которое относится к следующему витку:

$$(a^n + a^{n+1}) \frac{a^{n+1} - a^n}{2} + \frac{a^n + a^{n+1}}{2} - a^{n+1} = \frac{a^{n+1}(a^{n+1} - 1) - a^n(a^n - 1)}{2} \quad (3)$$

Формула (3) позволяет вывести уже давно известную формулу [5] для определения суммы всех натуральных чисел от единицы до любого числа a .

Для этого необходимо определить сумму чисел на нулевом витке **а-спирали** и добавить само число a :

$$\frac{a^{0+1}(a^{0+1} - 1) - a^0(a^0 - 1)}{2} + a = \frac{a(a+1)}{2}$$

Если построить числовую спираль для бесконечно большого числа (∞ -спираль), начало этой спирали будет отличаться от числового луча (рис. 1) только отсутствием нуля. Нулевой виток будет состоять из бесконечно большого количества единичных дуг, каждая единичная дуга будет ограничена лучами с бесконечно малым значением угла. Кривизна витка станет проявляться в районе очень больших чисел от начала спирали.

Числовые спирали и системы счисления

Числа на числовых спиралях могут быть представлены в разных системах счисления. Для примера рассмотрим числа на главной оси некоторых спиралей в разных системах счисления. *Таблица 1* показывает числа на главной оси **2-спирали** в двоичной, десятичной и шестнадцатеричной системах счисления.

Табл. 1

Степень числа 2	Основание системы счисления		
	2	10	16
0	1	1	1
1	10	2	2
2	100	4	4
3	1000	8	8
4	10000	16	10
5	100000	32	20
6	1000000	64	40
7	10000000	128	80
8	100000000	256	100
9	1000000000	512	200
10	10000000000	1024	400
11	100000000000	2048	800
12	1000000000000	4096	1000
13	10000000000000	8192	2000
14	100000000000000	16384	4000
15	1000000000000000	32768	8000
16	10000000000000000	65536	10000
17	100000000000000000	131072	20000
18	1000000000000000000	262144	40000
19	10000000000000000000	524288	80000
20	100000000000000000000	1048576	100000

В таблице 2 представлены числа на главной
оси **10-спирали** в тех же системах счисления.

Табл. 2

Степень числа 10	Основание системы счисления		
	2	10	16
0	1	1	1
1	1010	10	A
2	1100100	100	64
3	1111101000	1000	3E8
4	10011100010000	10000	2710
5	11000011010100000	100000	186A0
6	11110100001001000000	1000000	F4240
7	100110001001011010000000	10000000	989680
8	101111101011110000100000000	100000000	5F5E100
9	111011100110101100101000000000	1000000000	3B9ACA00
10	1001010100000010111110010000000000	10000000000	2540BE400

Аналогично, в таблице 3 представлены числа
на главной оси **16-спирали**.

Табл. 3

Степень числа 16	Основание системы счисления		
	2	10	16
0	1	1	1
1	10000	16	10
2	100000000	256	100
3	1000000000000	4096	1000
4	10000000000000000	65536	10000
5	10000000000000000000	1048576	100000
6	10000000000000000000000	16777216	1000000

Как видно из таблиц выше, каждая **а-спираль** в системе счисления с основанием **а** будет состоять из отдельных витков с числами, имеющими одинаковое количество разрядов в позиционной системе счисления. Каждый следующий виток числовой спирали для числа **а** в системе счисления с основанием **а** добавляет один разряд в позиционной системе записи чисел. Каждый **п-виток** состоит из чисел, записываемых при помощи **п+1** количества разрядов.

Если ввести правило, что единичные дуги на одном витке должны быть одинаковой длины, тогда числовая спираль превратится в набор концентрических окружностей. Каждая окружность будет содержать числа с одинаковым количеством разрядов. Введение подобного правила нарушает визуальную непрерывность натуральных чисел.

Таким образом, каждая **а-спираль** является графическим отображением натуральных чисел в системе счисления с основанием **а**, которая записана в выбранной нами системе счисления. По умолчанию мы применяем десятичную систему счисления.

Числовые спирали и простые числа

Все простые числа вида **Р** находятся в начале числовых лучей на всех числовых спиралях, за исключением простого числа **а**, расположенного на главной оси **а-спирали**. Взаимное расположение простых чисел будет меняться в зависимости от числа **а**, которое лежит в основе построения спирали (рис. 9 - 12).

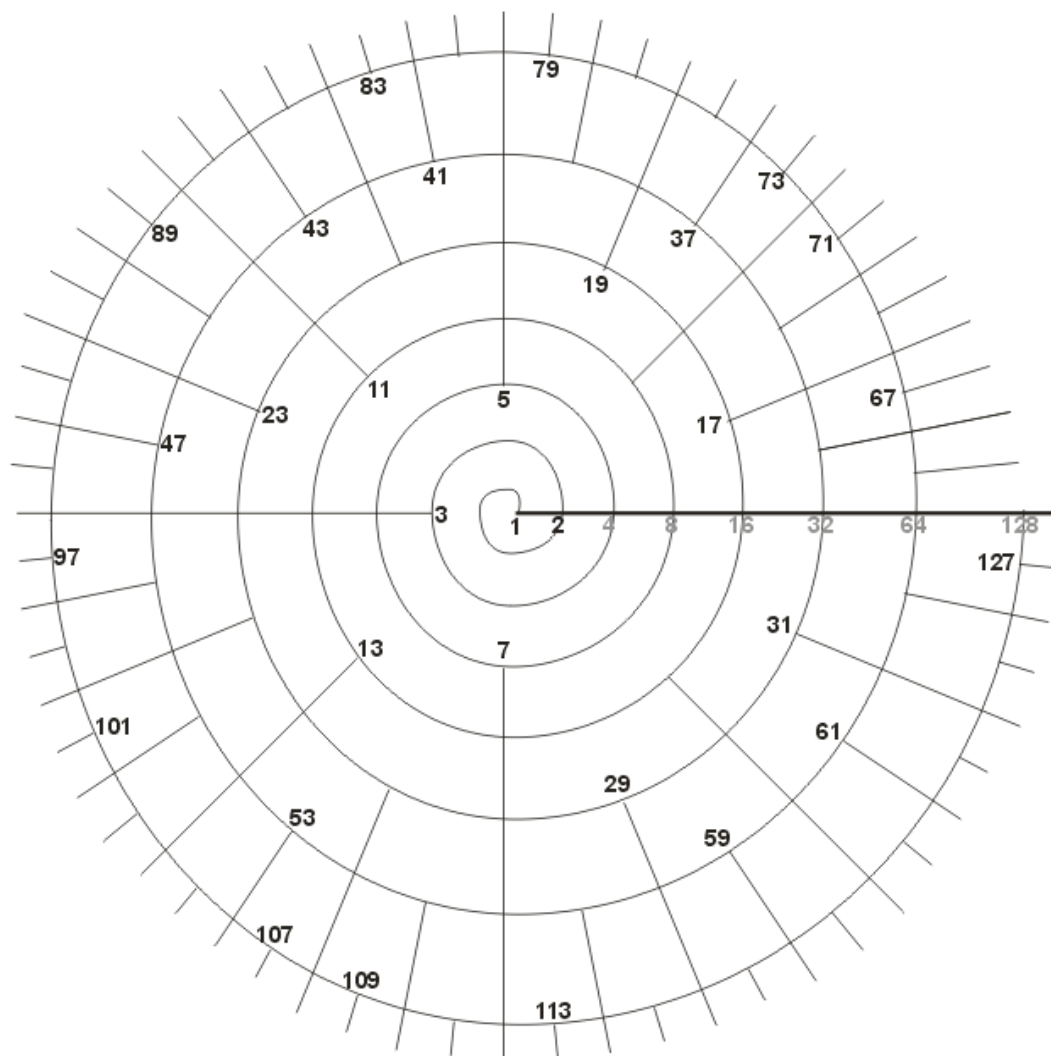


Рис.9 Простые числа на 2-спирали

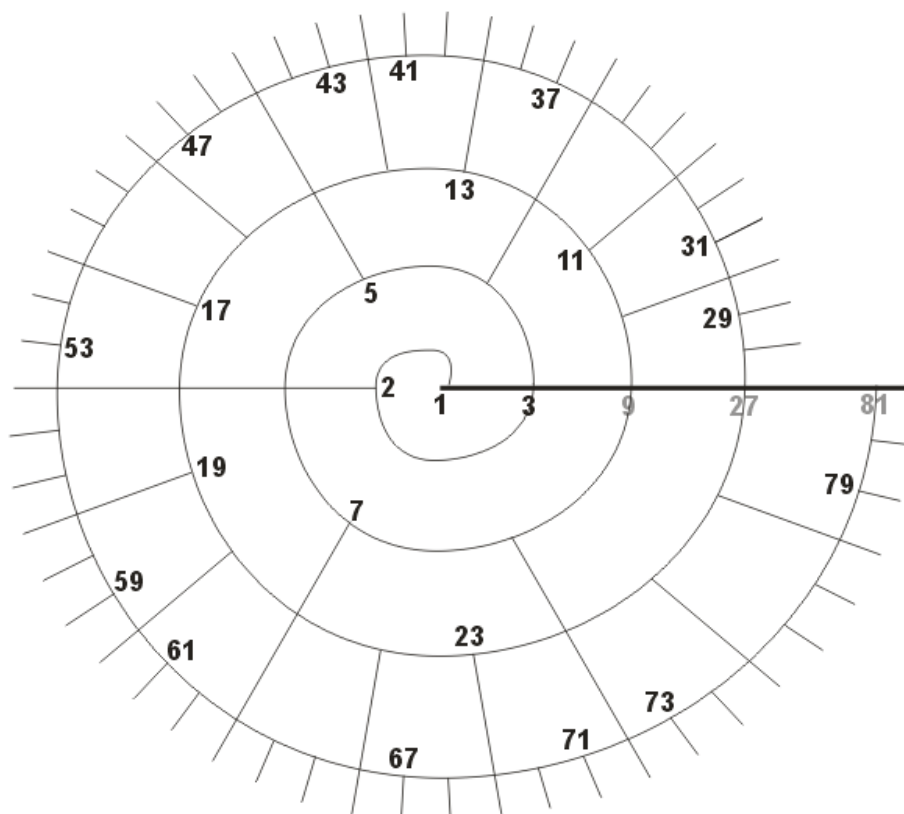


Рис.10 Простые числа на 3-спирали

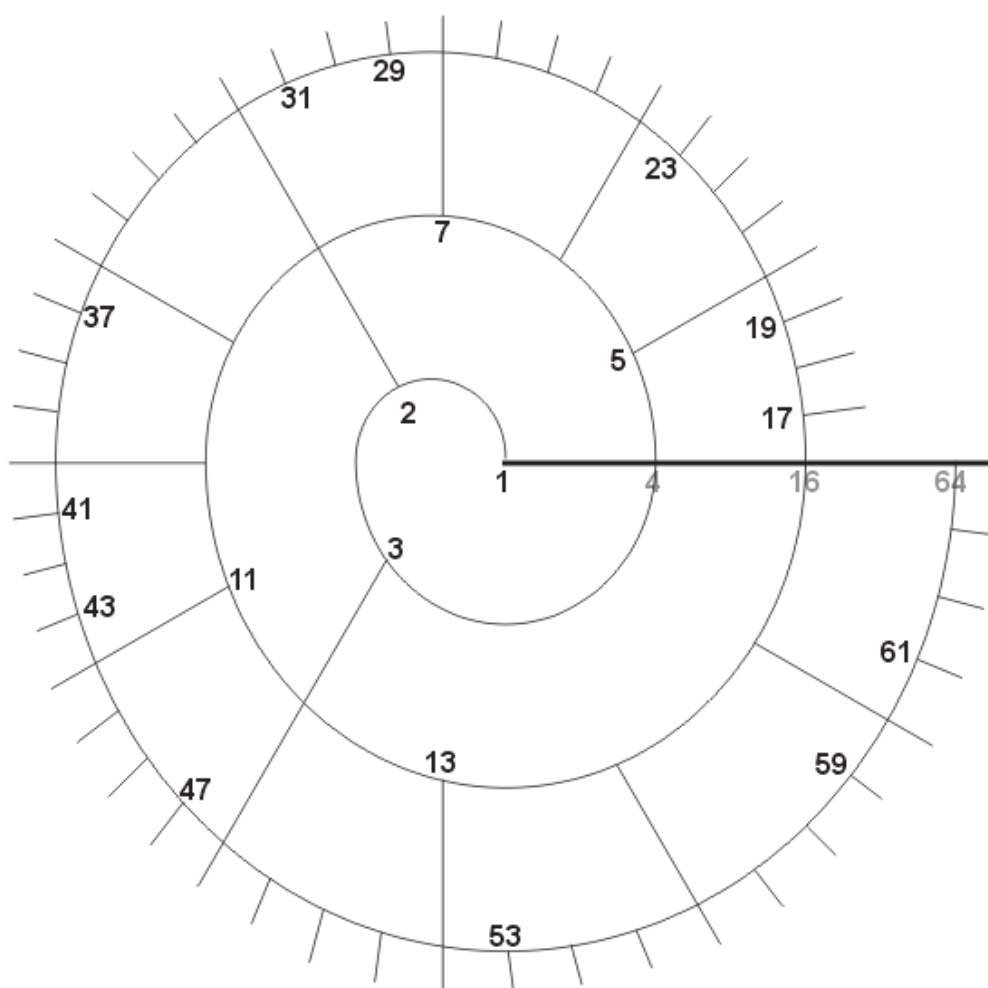


Рис.11 Простые числа на 4-спирали

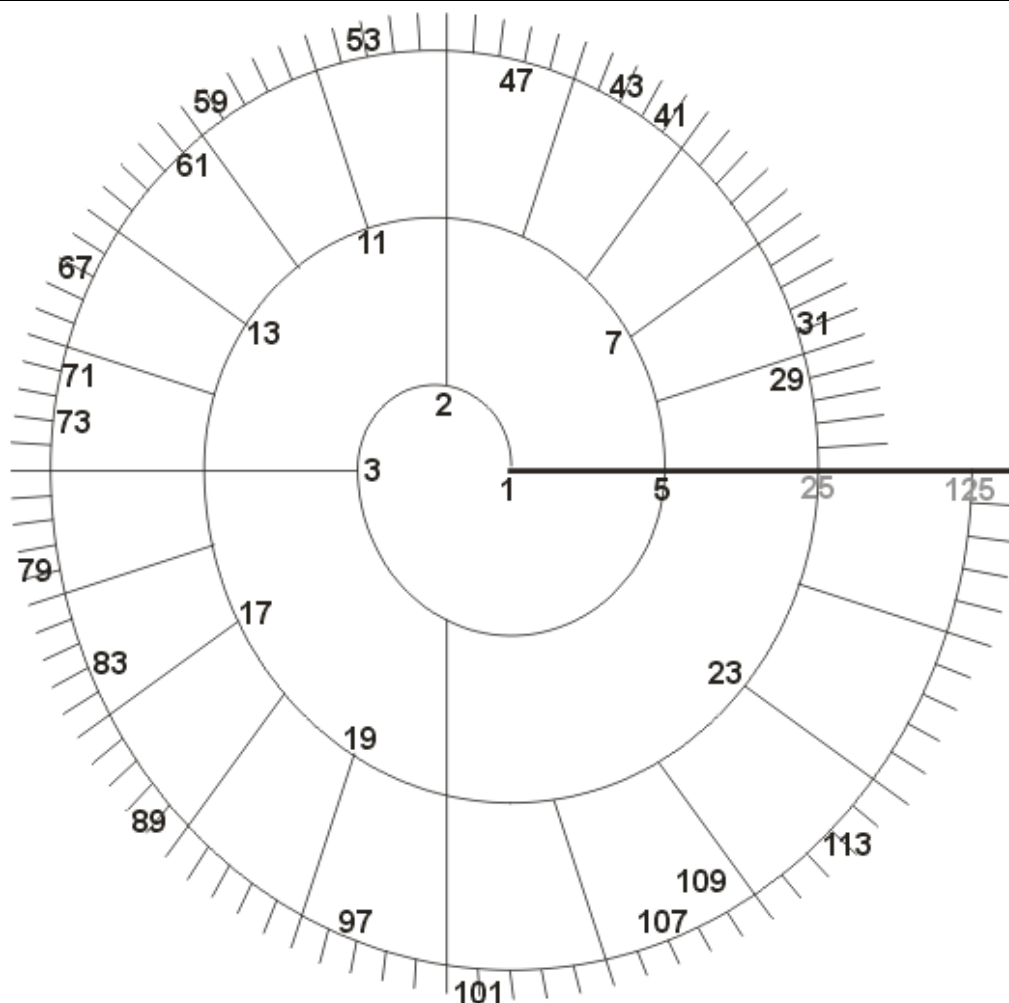


Рис.12 Простые числа на 5-спирали

Составные числа находятся на лучах спиралей, построенных на числах, являющихся делителями этих чисел. На остальных спиралях они расположены в начале числовых лучей. Например, число 6 находится на продолжении 3-луча 2-спирали (рис. 4) и является результатом умножения числа 3 на число 2. Это же число 6 находится на продолжении 2-луча 3-спирали (рис. 5) и является результатом умножения числа 2 на число 3.

Список литературы:

1. https://ru.wikipedia.org/wiki/Числовой_луч.

2. https://ru.wikipedia.org/wiki/Скатерть_Улама.

3. Н.Г.Хижняк «Тригонометрические функции в прямоугольнике», Журнал «Доклады независимых авторов» №36, 2016г.

4. Н.Г.Хижняк «Классификация сумм», Журнал «Доклады независимых авторов» №57, 2023г.

5. https://ru.wikipedia.org/wiki/Ряд_из_натуральных_чисел.