

MATHEMATICAL SCIENCES

UDC 517.946+681.3

CONDITIONS FOR THE EXISTENCE OF A UNIQUE SOLUTION TO THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A PARTIAL DERIVATIVE DIFFERENTIAL EQUATION WITH A NEGATIVE SIGN FOR THE HIGHER DERIVATIVE

Kuralbayev Z.*Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Almaty University of Power Engineering and Communications, Kazakhstan, Almaty*

УДК 517.946+681.3

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ЗНАКОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Куралбаев З.*профессор, доктор физико-математических наук
Алматинский университет энергетики и связи, Казахстан, Алматы
<https://doi.org/10.5281/zenodo.15220759>*

Abstract

The article examines about the existence of a unique solution to a boundary value problem for a second-order partial differential equation with a negative sign at the highest derivative. This equation was obtained as a result of mathematical modeling of creeping movements in a two-layer viscous fluid, when the density of the lower layer is less than the density of the upper layer, and is limited on both sides by «walls». It is known that due to the difference in the layers, a violation of the equilibrium state of the boundary between them occurs; the materials in the bottom layer go up and the definition of the law of changes in the boundary between layers. Here the need arose to solve a differential equation, the form of which differs from the usual parabolic type equation in that the sign of the highest derivative is negative. This difference from a well-studied equation of parabolic type leads to the need to study the existence of a unique solution to the problem for such a partial differential equation.

Аннотация

В статье рассматриваются вопросы о существовании единственного решения краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с отрицательным знаком при старшей производной. Данное уравнение получено в результате математического моделирования ползущих движений в двухслойной вязкой жидкости, когда плотность нижнего слоя меньше, чем плотность верхнего слоя, и ограниченного с двух сторон «стенками». Известно, что из-за разности плотностей слоев возникает нарушение равновесного состояния границы между ними; материалы нижнего слоя поднимаются вверх, а материалы верхнего слоя – вниз. Математическое описание этих движений привело к определению закона изменения границы между слоями. Здесь возникла потребность решения дифференциального уравнения, вид которого отличается от обычного уравнения параболического типа тем, что знак при старшей производной является отрицательным. Подобное отличие от хорошо исследованного уравнения параболического типа, приводит к необходимости исследования вопросов существования единственного решения задачи для такого дифференциального уравнения в частных производных.

Keywords: partial differential equations with a negative sign at the highest derivative, hydrodynamic instability, motion in a two-layer fluid, general solution of the equation, boundary value problem.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных с отрицательным знаком при старшей производной, гидродинамическая неустойчивость, движения в двухслойной жидкости, общее решение уравнения, краевая задача, существование единственного решения.

Постановка проблемы. Многочисленные исследования природных процессов [1-7], происходящих в земных недрах, начатые активно с середины двадцатого века и продолжающиеся в настоящее время, показали актуальность и эффективность применения методов математического моделирования для их изучения. Одной из важных задач в этих исследованиях была связана с изучением тектонических движений из-за различия физических свойств, в частности, различия плотностей верхних слоев Земли. Различие физических свойств земных слоев является одним из источников происходящих

тектонических процессов, изучение которых является актуальной проблемой [1-7]. Модельное исследование в лабораторных условиях впервые было проведено [5] с применением центрифуги.

В результате математического моделирования процессов, происходящих на границе «ползущих» слоев с различными плотностями, были получены различные задачи уравнений математической физики [8-12]. Актуальность исследования этих процессов связана с изучением причин образования земных структур и их последствий.

$$\Delta = \begin{pmatrix} c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c & \dots & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & c \end{pmatrix} \quad (11)$$

Вычисление определителя (11). Для вычисления данного определителя целесообразно поступить следующим образом. Пусть рассматриваются определители различных порядков, получаемых из данного определителя (11):

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= c; \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} c & 1 \\ 1 & c \end{vmatrix} = c^2 - 1; \quad \Delta_2 = c \cdot \Delta_1 - 1; \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} c & 1 & 0 \\ 1 & c & 1 \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix} = c \cdot \Delta_2 - \Delta_1; \\ \Delta_4 &= \begin{vmatrix} c & 1 & 0 & 0 \\ 1 & c & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \end{vmatrix} = c \cdot \Delta_3 - \Delta_2; \\ \Delta_5 &= \begin{vmatrix} c & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c \end{vmatrix} = c \cdot \Delta_4 - \Delta_3;\end{aligned}$$

Продолжение этих операций позволяет получить следующую рекуррентную формулу для вычисления определителей матриц различного ранга:

$$\Delta_k = c \cdot \Delta_{k-1} - \Delta_{k-2}, \quad k = 3, 4, 5, \dots, n-1. \quad (12)$$

При этом значение искомого определителя (11) системы линейных алгебраических уравнений (8) будет вычислено следующей формулой:

$$\Delta = \Delta_{n-1} = c \cdot \Delta_{n-2} - \Delta_{n-3}.$$

Пусть рассматриваются частные случаи, когда заданы различные соотношения между значениями шагов по переменным x и t . Здесь рассматриваются различные значения параметра $c = \frac{h^2}{\tau} - 2$. Можно рассматривать конкретное значение $n = 100$, т.е. $h = 0,02$, если $a = 1$.

1⁰. Случай, когда $\frac{h^2}{\tau} = 1$ или $c = -1$. Тогда формулами для вычисления определителей будут следующие:

$$\Delta_1 = -1; \quad \Delta_2 = -\Delta_1 - 1; \quad \Delta_k = -\Delta_{k-1} - \Delta_{k-2}, \quad k = 3, 4, 5, \dots, n-1.$$

. Вычисления по этим рекуррентным формулам позволяют получить следующую повторяющуюся последовательность:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= -1; \Delta_2 = 0; \Delta_3 = 1; \Delta_4 = -1; \Delta_5 = 0; \Delta_6 = 1; \\ \Delta_7 &= -1; \Delta_8 = 0; \Delta_9 = 1; \Delta_{10} = -1; \Delta_{11} = 0; \Delta_{12} = 1; \\ \Delta_{13} &= -1; \Delta_{14} = 0; \Delta_{15} = 1; \Delta_{16} = -1; \Delta_{17} = 0; \Delta_{18} = 1; \\ \Delta_{19} &= -1; \Delta_{20} = 0; \Delta_{21} = 1; \Delta_{22} = -1; \Delta_{23} = 0; \Delta_{24} = 1; \\ \Delta_{25} &= -1; \Delta_{26} = 0; \Delta_{27} = 1; \Delta_{28} = -1; \Delta_{29} = 0; \Delta_{30} = 1; \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta_{91} &= -1; \Delta_{92} = 0; \Delta_{93} = 1; \Delta_{94} = -1; \Delta_{95} = 0; \Delta_{96} = 1; \\ \Delta_{97} &= -1; \Delta_{98} = 0; \Delta_{99} = 1.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что искомое значение определителя (11) равно $\Delta = \Delta_{99} = 1$. Это означает, что система алгебраических уравнений (8) для данного случая $c = -1$ или $\frac{h^2}{\tau} = 1$ имеет единственное решение, что позволяет использовать любой из существующих методов для ее решения. Это, в свою очередь, дает возможность решения поставленной краевой задачи для дифференциального уравнения (1) – (4).

Эти операции были выполнены для $n = 1000$ и $n = 10000$, в результате которых получены те же значения для определителей основных матриц систем, состоящих из 999 и 9999 алгебраических уравнений $\Delta_{999} = \Delta_{9999} = 1$.

2⁰. Случай, когда $\frac{h^2}{\tau} = 2$ или $c = 0$. В этом случае система алгебраических уравнений (8) не имеет решения, потому что определитель ее основной матрицы будет равняться нулю. Доказательство этого утверждения следует из вычислений определителей матриц различного рангов, которые показаны в виде следующей последовательности чисел:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= 0; \Delta_2 = -1; \Delta_3 = 0; \Delta_4 = 1; \Delta_5 = 0; \Delta_6 = -1; \\ \Delta_7 &= 0; \Delta_8 = 1; \Delta_9 = 0; \Delta_{10} = -1; \Delta_{11} = 0; \Delta_{12} = 1; \\ \Delta_{13} &= 0; \Delta_{14} = -1; \Delta_{15} = 0; \Delta_{16} = 1; \Delta_{17} = 0; \Delta_{18} = \\ &-1; \\ \Delta_{19} &= 0; \Delta_{20} = 1; \Delta_{21} = 0; \Delta_{22} = -1; \Delta_{23} = 0; \Delta_{24} = 1; \\ \Delta_{25} &= 0; \Delta_{26} = -1; \Delta_{27} = 0; \Delta_{28} = 1; \Delta_{29} = 0; \Delta_{30} = \\ &-1;\end{aligned}$$

.....

$$\Delta_{91} = 0; \Delta_{92} = 1; \Delta_{93} = 0; \Delta_{94} = -1; \Delta_{95} = 0; \Delta_{96} = 1; \\ \Delta_{97} = 0; \Delta_{98} = -1; \Delta_{99} = 0.$$

Отсюда видно, что значение определителя основной матрицы системы алгебраических уравнений $\Delta = \Delta_{99} = 0$.

3⁰. Случай, когда $\frac{h^2}{\tau} = 3$ или $c = 1$. Тогда формулами для вычисления определителей будут следующие:

$$\Delta_1 = 1; \quad \Delta_2 = 0; \quad \Delta_k = \Delta_{k-1} - \Delta_{k-2}, \quad k = 3, 4, 5, \dots, n-1.$$

В данном случае повторяющаяся последовательность значений определителей матриц различного рангов будет записана в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= 1; \Delta_2 = 0; \Delta_3 = -1; \Delta_4 = -1; \Delta_5 = 0; \Delta_6 = 1; \\ \Delta_7 &= 1; \Delta_8 = 0; \Delta_9 = -1; \Delta_{10} = -1; \Delta_{11} = 0; \Delta_{12} = 1; \\ \Delta_{13} &= 1; \Delta_{14} = 0; \Delta_{15} = -1; \Delta_{16} = -1; \Delta_{17} = 0; \\ \Delta_{18} &= 1; \\ \Delta_{19} &= 1; \Delta_{20} = 0; \Delta_{21} = -1; \Delta_{22} = -1; \Delta_{23} = 0; \\ \Delta_{24} &= 1; \\ \Delta_{25} &= 1; \Delta_{26} = 0; \Delta_{27} = -1; \Delta_{28} = -1; \Delta_{29} = 0; \\ \Delta_{30} &= 1;\end{aligned}$$

.....

$$\Delta_{91} = 1; \Delta_{92} = 0; \Delta_{93} = -1; \Delta_{94} = -1; \Delta_{95} = 0; \\ \Delta_{96} = 1; \\ \Delta_{97} = 1; \Delta_{98} = 0; \Delta_{99} = -1.$$

Это означает, что для данного случая искомое значение определителя равно $\Delta_{99} = -1$. Следовательно система алгебраических уравнений (8) для $c = 1$ или $\frac{h^2}{\tau} = 3$ имеет единственное решение.

Заключение. В данной работе рассмотрена постановка краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных, отличающегося от обычного уравнения параболического типа знаком при старшей производной по координате x . Разностные уравнения для заданного дифференциального уравнения представляют собой систему линейных алгебраических уравнений, условие единственности ее решения в данном случае является важным для выполнения последующих операций

для получения искомого решения поставленной задачи. В связи с этим поставлена задача об определении условий существования единственного решения системы линейных алгебраических уравнений, которая получена в результате дискретизации дифференциального уравнения. Для решения этой проблемы было определено значение определителя основной матрицы полученной системы линейных алгебраических уравнений. В результате получена рекуррентная формула для вычисления определителя для различных случаев выбора шагов по независимым переменным x и t . Рассмотрены три частных случая; здесь показаны два случая, когда система алгебраических уравнений может иметь единственное решение и один случай, когда она не имеет решения.

Список источников:

1. Мазуров Б.Т., Кафтан В.И. Обзор развития геодинамики и геодезических методов решения геодинамических задач. – Геодинамические исследования. - 2020. №2. С. 25-39.
2. Кирдяшкин А.Г., Кирдяшкин А.А., Дистанов В.Э., Гладков И.Н. Геодинамические процессы в период подъема плюма промежуточной тепловой мощности в литосфере континента и при его прорыве на поверхность. – Геодинамика и тектонофизика. – 2020. №11(2). С. 397-416. <https://doi.org/10.5800/GT-2020-11-2-0482>
3. Кузьмин М., Ярмолук В., Кравчинский В. Глубинная геодинамика – основной механизм развития Земли. – Наука в России. - 2013. №6 (198). С. 10-20.
4. Ranalli G. Viscosity of the asthenosphere // Nature (Gr.Br.), 1993, Vol 361, 6409, P 231.
5. Рамберг Х. Моделирование деформации в земной коре с применением центрифуги. – М.: «Мир», 1970. – 453 с.
6. Jürgen Adam, Zhiyuan Ge, Marianela Sanchez. Salt-structural styles and kinematic evolution of the Jequitinhonha deepwater fold belt, central Brazil passive margin. - Marine and Petroleum Geology. - 2012. – Vol. 37. №1. P.101-120. <https://www.sciencedirect.com/journal/marine-and-petroleum-geology>.
7. Куралбаев З.К. Модельное исследование влияния локального поднятия мантийных веществ на тектоносферу // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета, 2005. - № 1(19). – С. 37-49.
8. Kuralbayev Z. Analytical solution of the problem of changing the boundary between different density layers // German International Journal of Modern Science, №24, 2021. – S. 29-36. ISSN (Print) 2701-8369 ISSN (Online) 2701-8377.
9. Шарроу, Франсуа. Неустойчивость в гидродинамике. Перевод с французского. М.: Институт компьютерных исследований, 2015. – 452 с. ISBN 978-5-4344-0300-9/
10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. –М.: МГУ Наука, 2004. – 725 с.
11. Захаров Е.В. Уравнения математической физики. – М.: Academia, 2017. – 400 с.
12. Денисов А.М. Итерационный метод решения задачи определения коэффициента и источника в уравнении теплопроводности. – Дифференциальные уравнения. - Т. 58. № 6. 2022. – С. 756-762. ISBN 0374-0641.
13. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 256 с.