

USING THE SYSTEM OF COMPUTER ALGEBRA MATHCAD FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS IN THE STUDY OF THE COMPULSORY COMPONENT “NUMERICAL METHODS” BY APPLICANTS OF SPECIALTY 122 “COMPUTER SCIENCE”

Ovcharuk V.

PhD, Docent, Associate Professor of the Department of Information technologies, artificial intelligence and cyber security, National University of Food Technologies, Kyiv, Ukraine

Ovcharuk I.

PhD, Docent, Associate Professor of the Department of Information technologies, State University of Infrastructure and Technologies, Kyiv, Ukraine

ВИКОРИСТАННЯ СИСТЕМИ КОМП'ЮТЕРНОЇ АЛГЕБРИ MATHCAD ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ПРИ ВИВЧЕННІ ОБОВ'ЯЗКОВОЇ КОМПОНЕНТИ «ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ» ЗДОБУВАЧАМИ СПЕЦІАЛЬНОСТІ 122 «КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ»

Овчарук В.

к.т.н., доцент, доцент кафедри інформаційних технологій, штучного інтелекту та кібербезпеки, Національний університет харчових технологій, Київ, Україна

Овчарук І.

к.т.н., доцент, доцент кафедри інформаційних технологій Державного університету інфраструктури та технологій м. Київ, Україна
<https://doi.org/10.5281/zenodo.15397817>

Abstract

The paper considers the possibilities of the MathCad computer algebra system for solving nonlinear and transcendental equations, both by means of MathCad built-in functions and in the program mode. Examples of solutions using the main known methods are given. The authors draw attention to the importance of studying this section of the compulsory component “Numerical Methods” for further education and research.

Анотація

У роботі розглянуті можливості системи комп'ютерної алгебри MathCad для розв'язання нелінійних і трансцендентних рівнянь, як засобами вбудованих функцій MathCad, так і в програмному режимі. Наведені приклади розв'язання основними відомими методами. Автори звертають увагу на важливість вивчення даного розділу обов'язкової компоненти «Чисельні методи» для подальшого навчання і наукової діяльності.

Keywords: numerical methods, nonlinear equations, MathCad.

Ключові слова: чисельні методи, нелінійні рівняння, MathCad.

Теоретичні відомості. При розв'язанні більшості технічних задач, побудові математичних моделей використовують нелінійні алгебраїчні або трансцендентні рівняння.

Нехай задано рівняння

$$f(x)=0, \quad (1)$$

де функція $f(x)$ – визначена і неперервна на деякому проміжку $[a, b]$.

Розв'язати рівняння означає знайти множину його коренів, тобто таких значень $x \in [a, b]$, при яких рівняння $f(x)=0$ перетворюється в тотожність. Якщо функція $f(x)$ – алгебраїчний многочлен, то рівняння (1) називається *алгебраїчним*. Якщо функція $f(x)$ містить тригонометричні, показникові або логарифмічні функції, тоді рівняння (1) називають *трансцендентним*.

Процес наближеного знаходження дійсних коренів складається з двох етапів:

1. Відокремлення, тобто знаходження досить малих відрізків, на кожному з яких міститься один і тільки один дійсний корінь;

2. Уточнення коренів – знаходження кореня рівняння з наперед заданою точністю.

Перший етап називають ще задачею визначення відрізків ізоляції коренів.

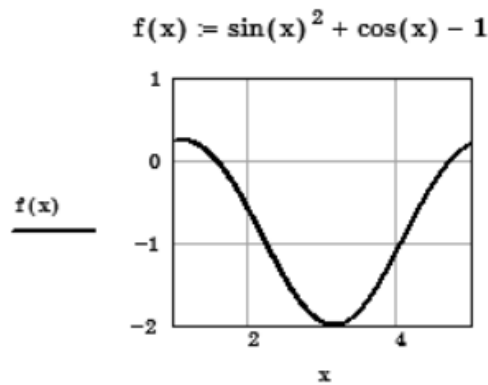
Методи відокремлення коренів. Графічний метод. Будуємо графік функції, шукані корені отримуємо як точки перетину графіка з віссю OX.

Система MathCAD дає можливість легко будувати графіки, тому зручна при реалізації цього методу.

Приклад 1. Відокремити графічно корені рівняння

$$\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$$

Розв'язання. В області визначення функції $f(x) = \sin(x)^2 + \cos(x) - 1$ задане рівняння має безліч коренів. Побудуємо графік функції $f(x)$, наприклад, на інтервалі $[1, 5]$.



На відрізку $[1, 5]$ функція має два корені, тому отримуємо два відрізки ізоляції коренів $[1, 2]$, $[4, 5]$. На наступному етапі будемо уточнювати корені на кожному відрізку.

Аналітичний метод відокремлення коренів ґрунтується на теоремах з курсу математичного аналізу.

Методи уточнення коренів. Ці методи застосовуються на відрізках ізоляції коренів, де є тільки один корінь.

а) метод поділу відрізка навпіл (бісекції). Нехай рівняння $f(x) = 0$ має на відрізку $[a, b]$ один дійсний корінь. Позначимо через x^* - точне значення кореня рівняння $f(x) = 0$ на відрізку $[a, b]$, ε - його

точність з якою будемо шукати цей корінь. Перевіряємо, щоб довжина відрізка $[a, b]$ була більшою за ε ($(b-a) > \varepsilon$). Сутність методу полягає в тому, що відрізок $[a, b]$ ділять навпіл точкою $c = (a + b)/2$ і обчислюють $f(c)$. Якщо $f(c) = 0$, то c - є точним значенням кореня. Якщо $f(c) \neq 0$, тоді аналізуємо добуток $f(a) * f(c)$. В тому випадку, коли $f(a) * f(c) < 0$, то корінь знаходиться на відрізку $[a, c]$, так як функція змінює знак, тому відрізок зменшується вдвічі тобто точка b переміщується в точку c ($b=c$).

Якщо $f(a) * f(c) > 0$, то корінь знаходиться на відрізку $[c, b]$, тоді точка $a = c$. Отриманий відрізок знову ділимо навпіл. Процес поділу здійснюється до тих пір, поки не буде досягнута задана точність, тобто $|b - a| \leq \varepsilon$.

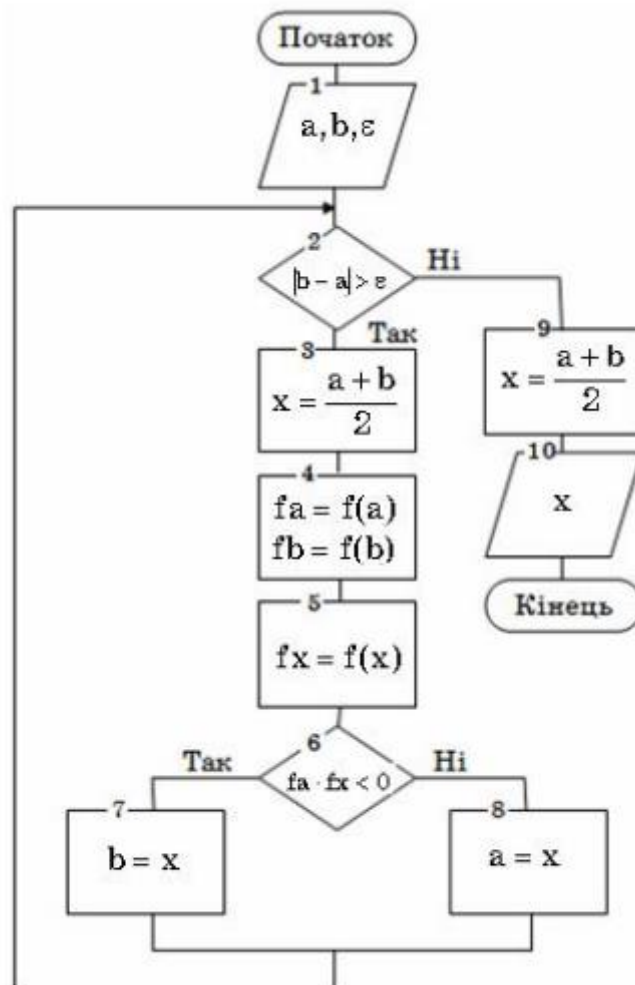
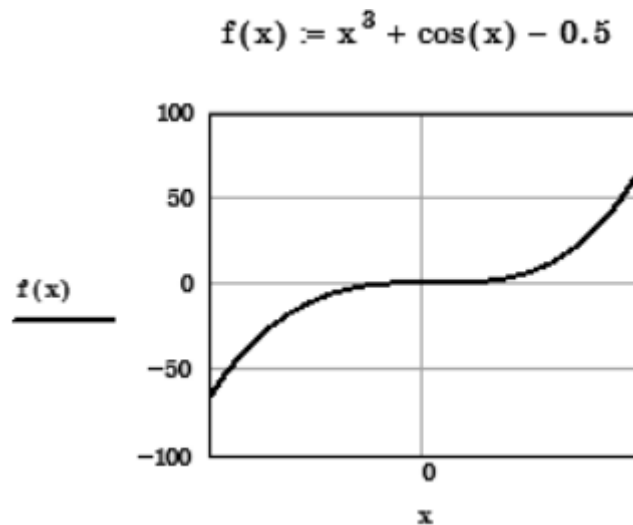


Рис. 1. Схема алгоритму метода бісекції

Розглянемо реалізацію алгоритму методу поділу відрізка навпіл в MathCAD на наступному прикладі.

Приклад 2. Знайти дійсний корінь рівняння $x^3 + \cos x - 0,5 = 0$ з точністю $\varepsilon = 0,001$ методом поділу відрізка навпіл.

Розв'язання. Відокремимо корені графічним методом. Визначимо ліву частину нелінійного рівняння як функцію $f(x) = x^3 + \cos x - 0,5$. Побудуємо графік функції $f(x)$, точка перетину якого з віссю абсцис є значення кореня заданого рівняння.



Визначимо по графіку значення кінців відрізка, який містить корінь рівняння, наприклад, $a = -1, b = 0$. Обчислимо наближене значення ізолюваного вже на відрізку $[-1; 0]$ кореня з точністю $\varepsilon = 0,001$ методом поділу відрізка навпіл.

Нижче наведено фрагмент програмного коду MathCAD з виконаними розрахунками, які описані за допомогою програми функції:

$a := -1 \quad b := 0$

```

bisec(a,b,ε) :=
    an ← a
    bn ← b
    while bn - an > ε
        x ← (an + bn) / 2
        fa ← f(an)
        fb ← f(bn)
        fx ← f(x)
        bn ← x if fa · fx < 0
        an ← x otherwise
    xn ← (an + bn) / 2

```

$\text{bisec}(a, b, 10^{-3}) = -0.662$

Отже, на відрізку $[-1, 0]$ отримали наближене значення кореня $x = -0,662$.

б) метод простої ітерації. Тепер, щоб розв'язати рівняння (1), застосуємо метод ітерацій (метод послідовних наближень). За початкове наближення кореня x_0 можна взяти довільне значення з інтервалу ізоляції кореня $[a, b]$. Всі наступні наближення обчислюються за формулами

$$x_{k+1} = \phi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Якщо послідовність наближень $\{x_k\}$ має границю x^* , тобто $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$, то ця границя і буде коренем рівняння (2). Збіжність послідовності $\{x_k\}$ забезпечується відповідним вибором функції $\phi(x)$ і початкового наближення x_0 . Метод ітерацій має простий геометричний зміст. Абсциса точки перетину графіків функцій $y = x$ і $y = \phi(x)$ є коренем рівняння (2).

Зведення рівняння $f(x) = 0$ до канонічної форми $x = \phi(x)$, для якої виконується умова збіжності

$$|\phi'(x)| \leq q < 1, \quad (3)$$

як правило, виконати не просто. Розглянемо один достатньо загальний спосіб приведення рівняння $f(x) = 0$ до канонічної форми $x = \phi(x)$, для якої виконуються умови збіжності.

Припустимо, що $0 < m \leq f'(x) \leq M < \infty$ при $a \leq x \leq b$ (якщо $f'(x) < 0$, то рівняння (1) треба домножити на -1), де $q = 1 - m/M$, m – мінімальне значення $f'(x)$ на відрізку $[a, b]$, M – максимальне значення $f'(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Тоді рівняння (1) можна звести до канонічної форми вигляду

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2}{m+M} f(x_k) \quad (4)$$

$$f(x) := x^3 + x - 7$$



Визначимо за графіком інтервал ізоляції кореня рівняння, наприклад, $[1, 2]$. Обчислимо наближене значення кореня на відрізку $[1, 2]$ з точністю $\varepsilon = 0,001$ методом ітерацій.

Перетворимо задане рівняння в рівносильне в канонічній формі.

$$x = 7 - x^3$$

Перевіримо виконання умови збіжності $|\phi'(x)| \leq q < 1$.

Запишемо в MathCAD праву частину рівняння в канонічній формі у вигляді функції

$$\phi(x) := 7 - x^3.$$

Візьмемо похідні від неї і перевіримо виконання умови збіжності

$$\left| \frac{d}{dx} \phi(x) \right| \rightarrow 3 \cdot (|x|)^2$$

$$\phi_1(x) := 3 \cdot (|x|)^2$$

$$\phi_1(1) = 3$$

$$\phi_1(2) = 12$$

Модуль похідної правої частини канонічної форми більше 1, тому не виконується умова збіжності (3). Зробимо інше перетворення в канонічну форму.

$$x = \sqrt[3]{7 - x}$$

Знову перевіримо виконання умови збіжності (3).

для якої виконується умова збіжності

$$|\phi'(x)| \leq q = \frac{M - m}{M + m} < 1.$$

Розглянемо реалізацію алгоритму методу ітерацій засобами МП MathCAD на наступному прикладі.

Приклад 3. Знайти дійсні корені рівняння $x^3 + x - 7 = 0$ методом ітерацій з точністю $\varepsilon = 0,01$.

Розв'язання. Відокремимо корені заданого рівняння графічним методом.

Визначимо ліву частину нелінійного рівняння як функцію $f(x) = x^3 + x - 7$. Побудуємо графік функції $f(x)$, точка перетину якого з віссю абсцис і є значення кореня заданого рівняння.

$$\phi(x) := \sqrt[3]{7 - x}$$

$$\left| \frac{d}{dx} \phi(x) \right| \rightarrow \frac{1}{3 \cdot (|7 - x|)^{\frac{2}{3}}}$$

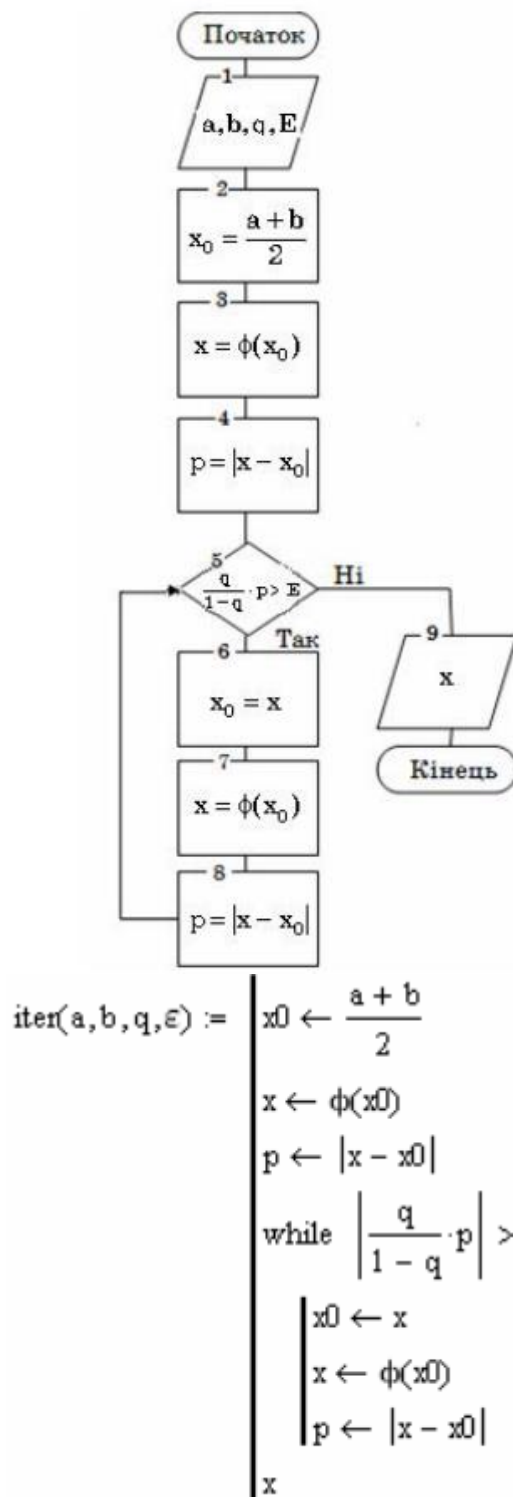
$$\phi_1(x) := \frac{1}{3 \cdot (|7 - x|)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\phi_1(2) = 0.114$$

$$\phi_1(3) = 0.132$$

Тепер умова збіжності (3) виконується.

Застосуємо метод ітерацій (метод послідовних наближень) для обчислення наближеного значення кореня на відрізку $[1, 2]$ з точністю $\varepsilon = 0,01$. Нижче наведені схема алгоритму та програма-функція МП MathCAD, що реалізують описаний метод.



За початкове наближення в програмі беремо середину відрізка $x_0 = (a + b) / 2$.

Нижче звертаємось до програми-функції, вказавши її ім'я, а в дужках фактичні значення параметрів.

$$\text{iter}(1, 2, 0.12, 10^{-2}) = 1.736$$

Розглянемо реалізацію в MathCAD загального способу приведення рівняння $f(x) = 0$ до канонічної форми $x = \phi(x)$, для якої виконуються умови збіжності. Нижче наведено реалізацію знаходження наближеного значення кореня рівняння в середовищі MathCAD.

$$f(x) := x^3 + x - 7$$

$$\frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 3 \cdot x^2 + 1$$

$$f1(x) := 3 \cdot x^2 + 1$$

$$f1(1) = 4$$

$$f1(3) = 28$$

$$M := 28 \quad m := 4$$

$$x_0 := 1 \quad k := 0..10$$

$$x_{k+1} := x_k - \frac{2}{M + m} \cdot f(x_k)$$

$$x_{k+1} =$$

1.313
1.527
1.646
1.702
1.725
1.734
1.737
1.738
1.739
1.739
1.739

$$\epsilon := 0.01$$

$$q := 1 - \frac{m}{M}$$

$$q = 0.857$$

$$\frac{1 - q}{q} \cdot \epsilon = 1.667 \times 10^{-3}$$

$$\frac{q}{1 - q} \cdot |x_{10} - x_9| = 1.029 \times 10^{-3}$$

Розв'язування нелінійних рівнянь за допомогою вбудованих функцій МП MathCAD.

Для розв'язування рівнянь, де одне алгебраїчне рівняння включає одну невідому x , в МП MathCAD існує вбудована функція **root**, яка в залежності від типу задачі може включати в себе або два, або чотири аргументи, і відповідно працювати по різному.

♦ **root(f(x), x)**,

♦ **root(f(x), x, a, b)**,

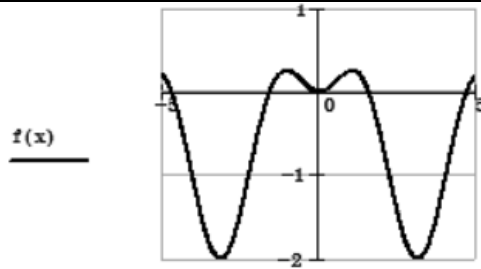
де $f(x)$ – скалярна функція, яка визначає рівняння, x – скалярна змінна, відносно якої розв'язується рівняння, a, b – границі інтервалу, всередині якого знаходять корінь.

Перший тип функції потребує додаткового задання початкового значення змінної x . Для цього потрібно просто заздалегідь присвоїти x деяке число. Пошук кореня буде відбуватися поблизу заданого початкового значення. Таким чином, присвоєння початкового значення потребує апріорної інформації про приблизну локалізацію кореня. Для цього слугують графіки і математичні методи знаходження коренів.

Приклад 4. Знайти корені нелінійного алгебраїчного рівняння.

$$\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$$

Розв'язання. Побудуємо графік функції і визначимо інтервали ізоляції кореня.



Застосуємо функцію **root** для визначення двох наближених коренів рівняння з усіх існуючих.

$$\text{root}(\sin(x)^2 + \cos(x) - 1, x, -5, -2) = -4.712$$

$$\text{root}(\sin(x)^2 + \cos(x) - 1, x, 1, 3) = 1.571$$

2) Якщо функція $f(x)$ є поліномом, то всі корені алгебраїчного рівняння $f(x) = 0$ можна знайти за допомогою вбудованої функції **polyroots(v)**, де v – вектор, створений з коефіцієнтів полінома.

Оскільки поліном n -го степеня має рівно n коренів (деякі з них можуть бути комплексними), вектор v повинен складатися з $n + 1$ елементів. Результатом дії функції **polyroots** є вектор, що складається з n коренів полінома. При цьому немає потреби вводити **початкове** наближення, як для функції **root**.

Для функції **polyroots** можна вибрати один із двох чисельних методів – метод поліномів Лагера (він установлений за замовчуванням) або метод парної матриці.

Для зміни методу:

- Викличте контекстне меню, клацнувши правою кнопкою миші на слові **polyroots**.

- У верхній частині контекстного меню виберіть або пункт **LaGuerre** (Лагера), або **Companion Matrix** (Парна матриця).

- Клацніть поза дією функції **polyroots** – якщо включено режим автоматичних обчислень, буде виконано перерахування коренів полінома відповідно до заново обраного методу. Для того щоб залишити за Mathcad вибір методу рішення, установіть прапорця **AutoSelect** (Автоматичний вибір), вибравши потрібний пункт контекстного меню.

Приклад 5. Знайти корені нелінійного алгебраїчного рівняння

$$x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3 = 0$$

Розв'язання.

$$v := \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 12 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} 0.992 \\ 1.004 + 7.177i \times 10^{-3} \\ 1.004 - 7.177i \times 10^{-3} \\ 3 \end{pmatrix}$$

Інколи вихідний поліном записаний не в розгорнутому виді, а, наприклад, як добуток декількох поліномів. У цьому випадку визначити всі його коефіцієнти можна, виділивши його й вибравши в меню **Symbolics** (Символіка) пункт **Expand** (Розкласти). У результаті символічний процесор MathCAD сам перетворить поліном у потрібну форму, користувачеві потрібно буде тільки коректно ввести всі аргументи функції **polyroots**.

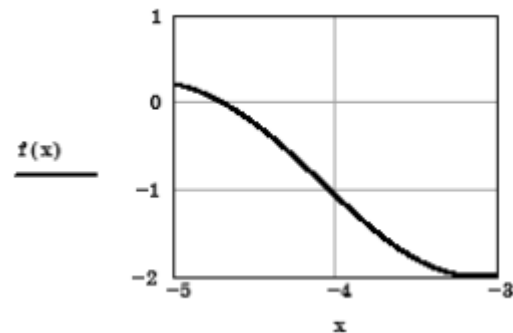
3) Для розв'язування рівняння можна використати спеціальний обчислювальний блок, що складається із трьох частин, які йдуть послідовно одна за одною:

- ♦ **Given** – ключове слово;
- ♦ система, записана логічними операторами у вигляді рівностей і, можливо, нерівностей;
- ♦ **Find(x)** – вбудована функція для розв'язування рівняння щодо змінної x .

Приклад 6. Знайти корінь рівняння $\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$ за допомогою блоку **Given / Find**.

Розв'язання. Відокремимо графічно корені заданого рівняння. В області визначення функції $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$ задане рівняння має безліч коренів. Побудуємо графік функції $f(x)$, наприклад, на інтервалі $[-5, -3]$.

На відрізку $[-5, -3]$ функція має один корінь. На наступному етапі будемо уточнювати корінь на знайденому відрізку ізоляції за допомогою блоку **Given / Find**.



За початкове значення візьмемо будь-яке число з відрізка $[-5, -3]$.

$$x := -5$$

Given

$$\sin(x)^2 + \cos(x) - 1 = 0$$

$$\text{Find}(x) = -4.712$$

Список літератури:

1. Чисельні методи: Навчальний посібник. / Волонтир Л.О., Зелінська О.В., Потапова Н.А., Чіков І.А., Вінницький національний аграрний університет. – Вінниця: ВНАУ, 2020 – 322 с.
2. Чисельні методи розв'язання прикладних задач: навч. посіб. / О.А. Гончаров, Л.В. Васильєва, А.М. Юнда. – Суми: Сумський державний університет, 2020. – 142 с.
3. Фельдман, Л. П. Чисельні методи в інформатиці: підруч. / Л. П. Фельдман, А. І. Петренко, О. А. Дмитрієва. – К.: Видавнича група BHV, 2006. – 480 с.