

TECHNICAL SCIENCES

ASYMPTOTIC ATTAINMENT OF THE K.E. SHANNON ENERGY LIMIT VALUE WITH A SYNCHRONOUS ORTHOGONAL CODE

Kuznetsov V.

National Research University "Moscow Institute of Electronic Technology,"
Doctor of Engineering Sciences, Professor, Moscow, Russia

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ДОСТИЖЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ К.Э. ШЕННОНА ПО ЭНЕРГЕТИКЕ СИНХРОННЫМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ КОДОМ

Кузнецов В.С.

Национальный исследовательский университет "Московский институт электронной техники",
доктор технических наук, профессор, Москва, Россия
<https://doi.org/10.5281/zenodo.17226061>

Abstract

This article proves that the synchronous orthogonal code OK2048 provides an asymptotically limiting minimum $\frac{E_{bit}}{J_0}$ ratio in a continuous Gaussian channel at an information rate equal to the channel capacity. The decoding complexity is determined by the extremely sparse matrix of this orthogonal code.

Аннотация

В статье доказано, что синхронный ортогональный код ОК2048 обеспечивает асимптотически предельное минимальное отношение $\frac{E_{bit}}{J_0}$ в непрерывном гауссовском канале при скорости передачи информации, равной пропускной способности канала. Сложность декодирования определяется предельно разреженной матрицей этого ортогонального кода.

Keywords: continuous Gaussian channel with AWGN, PPSU codes, synchronous orthogonal code, frequency efficiency, signal separability.

Ключевые слова: непрерывный гауссовский канал с АБГШ, коды ППСУ, синхронный ортогональный код, частотная эффективность, разделимость сигналов.

Введение

Целью статьи является рассмотрение принципов построения системы передачи информации на основе синхронного ортогонального кода (ОК), являющегося на сегодняшний день лучшим кодом плотнейшей поверхности – сферической укладки (ППСУ). Сложность декодирования этого ОК определяется матрицей Адамара, или диагональной матрицей, обладающими уникальным свойством предельного разрежения вплоть до двух, или до одного ненулевого элемента в каждой строке задающей матрицы при любой длине существования ОК.

Прямая радиоперелиния

Прямая линия (Forward Link) строится по схеме синхронного ОК с одновременной и синхронной передачей всех n_{OK} каналов строго при нулевом сдвиге начала каждой кодовой комбинации относительно начального момента времени передачи синхронного ОК (необходимое условие ортогональности кода). В силу ортогональности все каналы синхронного ОК являются взаимно линейно независимыми и, как следствие, разделимы на приёме. Кодирование устройство синхронного ОК кодируется внешним потоком равновероятных тричных символов со значениями $\{\pm 1, 0\}$ (см. рис. 1).

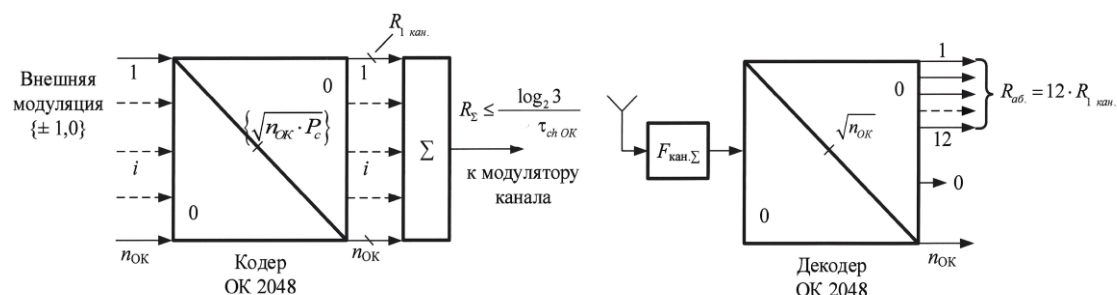


Рисунок 1 – Структурная схема прямой радиоперелинии (Forward link): в соте 170 абонентам отводится по 12 информационных каналов и 1 (служебному) абоненту отводится 8 каналов

В этом случае суммарная скорость передачи

$$R_{\Sigma} = \frac{\log_2 3}{\tau_{ch_OK}}, \quad (1)$$

$$R_{1\text{кан.}} = \frac{R_{\Sigma}}{n_{OK}}. \quad (2)$$

$$R_{аб.} = 12 \cdot R_{1\text{кан.}} \quad (3)$$

Результаты расчёта скорости передачи представлены в таблице 1.

Таблица 1.

Расчёт значений скорости передачи и требуемой полосы частот в прямой радиолнии

№	Наименование параметра	Расчётные значения	Примечание
1	R_{Σ}	361, 37 Мбит/с	$\max f_{\text{ТИ}_{MS}} = 912,0 \text{ МГц},$ $\max f_{\text{ТИ}_{OK}} = 228,0 \text{ МГц}$
2	$R_{1\text{кан.}}$	0,1765 Мбит/с	
3	$R_{аб.}$	2,1174 Мбит/с	
4	$F_{\text{кан.}\Sigma}$	7924,8 МГц	

В Forward link синхронный ОК передаёт информацию без внешнего помехоустойчивого кодирования. В этой линии с синхронным ОК взаимные помехи отсутствуют, канал – непрерывный гауссовский.

$$q_{bitOK} = \frac{Q_{err.dX}}{n_{OK}} \leq (N_d + (V_{\text{акт.}} - 1)) \cdot Q\left(\sqrt{\frac{P_c}{\sigma^2}} \cdot d_X\right) \cdot \frac{d_X}{n_{OK}}, \quad (4)$$

где $(n_{OK}, V_{\text{акт.}}, d_X, N_d)$ – параметры синхронного

ОК, $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x}{\sigma}}^{\infty} e^{-t^2/2} \cdot dt$ – интеграл вероятности ошибки.

При заданной вероятности ошибки декодирования q_{bitOK} по выр. (4) рассчитывается требуемое

отношение $\frac{P_c}{\sigma^2} = \frac{X^2}{d_X}$. Расчёт помехоустойчивости

выполняется при скорости передачи, равной пропускной способности канала. В этом случае $\frac{E_{bit}}{J_0} = \frac{P_c}{\sigma^2} \cdot \gamma_{\text{кан.}\Sigma}$, где частотная эффективность канала $\gamma_{\text{кан.}\Sigma} = \log_2(1 + \frac{P_c}{\sigma^2})$.

При $F_{\text{кан.}\Sigma} \rightarrow \infty \lim \frac{E_{bit}}{J_0} = \lim \frac{\frac{P_c}{\sigma^2} \cdot \ln 2}{\ln(1 + P_c/\sigma^2)} = \ln 2 = -1,59 \text{ дБ} [1]$.

Таким образом, выбор максимально допустимого значения частотной эффективности широкополосной системы, равным частотной эффективности канала, $\gamma_{\text{сист.}} = \frac{R}{F_{\text{кан.}\Sigma}} = \gamma_{\text{кан.}\Sigma}$, минимизирует

требуемое отношение $\frac{E_{bit}}{N_0}$.

Результаты расчёта требуемых отношений $\frac{E_{bit}}{N_0}$ для синхронного ортогонального кода ОК- 2048 при его приёме в непрерывном гауссовском канале приводятся в таблице 2.

Таблица 2.

Расчёт помехоустойчивости синхронного ОК-2048 в непрерывном канале с АБГШ

$q_{bit \Sigma}$	$(P_c / \sigma^2)_{вх.ОК}$	$\gamma_{\text{кан.}\Sigma}$	$\frac{E_{bit}}{N_0} \text{ дБ}$
10^{-3}	0.0234	0.0334	- 1,541
10^{-5}	0,0321	0,0456	- 1,523
10^{-7}	0,0409	0,0578	- 1,504
10^{-10}	0,0541	0,0760	- 1,477

Требуемая полоса частот также рассчитывается из условия согласования по скорости передачи с пропускной способностью непрерывного гауссовского канала.

$R_{\Sigma} = \frac{\log_2 3}{\tau_{ch_OK}} = C_{\Sigma} = \frac{1}{l_{\Sigma} \cdot \tau_{ch_OK}} \cdot \gamma_{\text{кан.}\Sigma}$, $l_{\Sigma} = \frac{\gamma_{\text{кан.}\Sigma}}{\log_2 3}$ – коэффициент согласования.

$$F_{\text{кан.}\Sigma} = \frac{1}{l_{\Sigma} \cdot \tau_{ch_OK}} = \frac{\log_2 3}{\gamma_{\text{кан.}\Sigma} \cdot \tau_{ch_OK}} = \frac{R_{\Sigma}}{\gamma_{\text{кан.}\Sigma}} \text{ при}$$

скорости передачи $R_{\Sigma} = C$.

Результаты расчётов R_{Σ} и $F_{\text{кан.}\Sigma}$ в прямой радиолнии при $q_{bit \Sigma} = 10^{-5}$ приводятся в таблице

1. В статье анализируются предельные возможности системы. При широкой полосе частот радиоканала в нём обеспечивается высокая помехозащищённость против искусственных помех. Требуемое значение полосы частот $F_{\text{кан.}\Sigma}$ можно уменьшить выбором меньших значений тактовой частоты. При этом достигнутые значения отношения $\frac{E_{bit}}{N_0}$ остаются без изменения.

По мнению автора лучший результат помехоустойчивого кодирования ($\frac{E_{bit}}{N_0} = 0,7 \text{ дБ}$ при

$q_{bit} = 10^{-5}$), полученный Claude Berrou и его соавторами для Turbo – Code на основе свёрточного

кода с кодовым ограничением $K = 5$, а также лучшие результаты, достигнутые длинными LDPC кодами [2], получены для этих кодов с выбором относительной скорости кодирования $r_c = 1/2$ поиск “вслепую”. Такие неширокополосные коды не в состоянии достигнуть даже отношения $\frac{E_{bit}}{N_0} = 0\text{дБ}$.

В работах автора [3, 4] и, в частности, в приведённых выше расчётах (см. табл.2) доказывається, что при скорости передачи информации $R_\Sigma = C_\Sigma$ предельно минимальные отношения $\frac{E_{bit}}{N_0}$ достигаются в широкополосной системе с высокой помехоустойчивостью. Этим требованиям удовлетворяют симплексные, биортогональные и синхронные ортогональ-

ные коды, являющиеся кодами плотнейшей поверхностно – сферической укладки [5, 6].

В работах [7, 8] приводится с описанием конкретная каскадно – кодовая конструкция со скоростью передачи $1,3/\tau_{ch}$ на основе синхронного ОК128 и внешнего троичного помехоустойчивого кода с блоковой длиной 128. Согласно [8], при $q_{bit} = 10^{-5}$ требуется обеспечить $\frac{E_{bit}}{N_0} = -1,11\text{ дБ}$.

Обратная радиолиния

Обратная радиолиния может быть спроектирована по образцу радиointерфейса стандарта IS – 95. В этом случае выполняется равенство длительностей сигналов

$$n_{OK} \cdot \tau_{ch,OK} = (D_{\text{адрес}MS} + 1) \cdot \tau_{ch,MS} \quad (5)$$

при максимальной тактовой частоте сигналов генератора “Адрес MS” (она же тактовая частота радиоканала).

$$f_{TH_MS} = \frac{1}{\tau_{ch,MS}} = \frac{D_{\text{адрес}MS} + 1}{n_{OK} \cdot \tau_{ch,OK}} = \frac{8192}{2048 \cdot \tau_{ch,OK}} = \frac{4}{\tau_{ch,OK}}. \quad (6)$$

Согласно [9], уровень микроэлектроники на российском рынке на сегодняшний день определяется технологией изготовления 40 нм, что задаёт максимальную тактовую частоту, равной 912,0 МГц при нормальных условиях эксплуатации. Тогда при $f_{TH_MS} = f_{TH_BS} = 912,0\text{ МГц}$ max $f_{TH_OK} = \frac{1}{\tau_{ch,OK}} = 228,0\text{ МГц}$.

Основную роль синхронизации в обратной радиолинии выполняет сигнал “Адрес BS” с длительностью $T_{\text{адрес}BS} = (2^{16} - 1) \cdot \tau_{ch,BS}$. Передние фронты сигналов синхронного ОК и генератора сигналов “Адрес MS” в обратной радиолинии жёстко привязаны к переднему фронту сигнала “Адрес BS”. При этом на длительности этого сигнала размещаются одновременно 8 сигналов синхронного ОК и 8 сигналов “Адрес MS” (см. рис. 2).

Каждому из 170 групповых абонентов в обратной радиолинии отводится по 12 каналов. Рассмотренное выше обоснование выбора тактовых частот учтено при описании Forward Link.

Абоненты в обратной радиолинии работают в асинхронном режиме. Основной задачей является расчёт максимально допустимого числа одновременно работающих на передачу (в сторону “своей” BS) абонентов и скорости передачи абонента $R_{аб.}$. При спектральной плотности мощности теплового шума

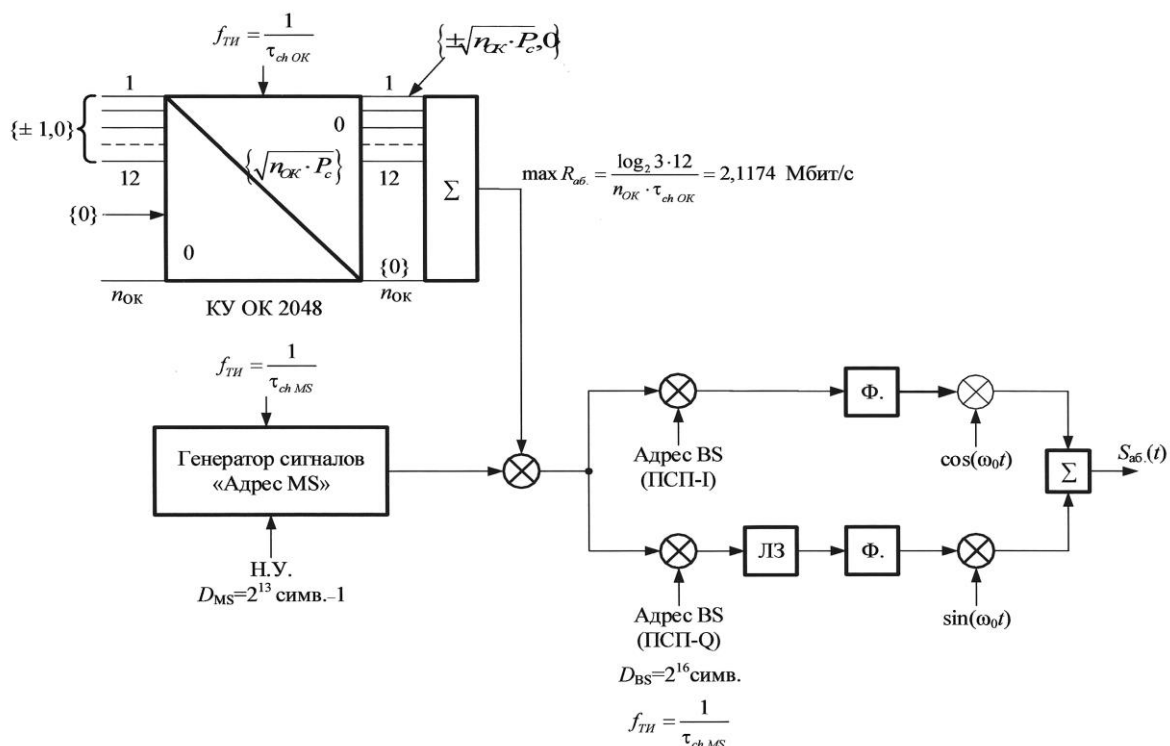


Рисунок 2. Структурная схема обратного канала абонента.

$N_0 = 290^0 \cdot 1,380662 \cdot 10^{-23} \frac{W}{Hz} = 4,004 \cdot 10^{-21} \frac{W}{Hz}$ воспользуемся методикой расчёта фирмы Qualcomm (без учёта мощности теплового шума $\sigma^2 = N_0 \cdot F$)

$$(M-1) = \frac{C_p \cdot \eta_p}{\left(\frac{E_{bit}}{J_0}\right)_{OK} \cdot \nu_f \cdot (1+f)}, \quad (7)$$

где M – число обратных каналов в секторе соты,

$S = 3$ – число секторов приёмной антенны на входе BS,

$$G_p = \frac{2 \cdot F_{кан. MS}}{R_{аб.}} = \frac{B_w}{R_{аб.}} - \text{выигрыш обработки,}$$

η_p – коэффициент эффективности управления мощностью передатчиков абонентов в обратной радиолнии,

$$E_{bit_OK} = \frac{P_c}{R_{аб.}} - \text{требуемый абонентом расход энергии на бит,}$$

$J_0 = \frac{(M-1) \cdot \gamma_f \cdot P_c}{F}$ – спектральная плотность мощности взаимных помех,

ν_f – коэффициент речевой активности,

f – коэффициент влияния передающих устройств BS соседних сот.

Расчёт энергетике наземных радиолний выполняется при условии работы как в обратной, так и в прямой радиолнии с обязательным наличием Rake receiver в точках приёма.

Для расчёта помехоустойчивости в информационном подканале абонента используем выр. (4) при $V_{акт.} = 12$ каналов. Тогда, например, при вероятности $q_{бум_аб.} = 10^{-5}$ требуемое отношение

$$\frac{P_c}{\sigma^2} = 0,0308, \quad \text{частотная эффективность}$$

$$\gamma_{кан.аб.} = 0,043764 \text{ бит} / (с \cdot Гц), \text{ а}$$

$$\left(\frac{E_{bit}}{N_0}\right)_{OK} = -1,5257 \text{ дБ.} \quad (8)$$

При оценке остальных параметров в выражении (7) значениями:

$$B_w = 2F_{кан. MS} \cong \frac{1}{\tau_{ch. MS}} = 912,0 \text{ МГц (информация в служебном подканале абонента не передается, } R_{MS} = 0), \eta_p = 0,8, (M-1) = 682 \text{ приёмных канала при трёхсекторной антенне на входе BS, } \nu_f = 0,43, (1+f) = 1,668 \text{ значение скорости передачи группового абонента } R_{аб.} = 2,12 \cdot 10^6 \text{ бит/с.}$$

При этом значении $R_{1кан.} = \frac{R_{аб.}}{12} = 0,1767 \cdot 10^6 \text{ бит/с.}$

В итоге $R_\Sigma = R_{аб.} \cdot 170 + R_{1кан.} \cdot 8 = 361,8 \cdot 10^6 \text{ бит/с.}$

Число каналов, отводимых одному абоненту, $N_{кан.1аб.} = \frac{R_{аб.} \cdot n_{ок}}{R_\Sigma}$, где скорость передачи $R_{аб.}$ определяется выражением (7). В данной работе принято $N_{кан.1аб.} = 12$ ортогональных каналов. Число групповых абонентов в обратной радиолнии равно $N_{аб.} = \left[\frac{2048}{12}\right] = 171 \text{ абонент} \left(57 \frac{\text{абонентов}}{\text{сектор соты}}\right)$.

Требуемые полосы частот $F_{аб.} = \frac{R_{аб.}}{\gamma_{кан.аб.}} = F_{1кан.} = 48,44 \text{ МГц.}$

Максимальная скорость передачи абонентской станции может быть определена из условия согласования с каналом по скорости, т.е. при $\max R_{аб.} = C_{аб.}$.

$$\max R_{аб.} = F_{аб.} \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P_c}{\sigma}\right) = 2,12 \cdot 10^6 \text{ бит/с.}$$

Но, если диагональную матрицу, задающую ортогональный код, заменить на матрицу

Адамара, то скорость передачи абонента $R_{аб.}$ снижается в $\log_2 n_{OK} = 11$ раз.

Заметим, что начальная установка генератора сигналов “Адрес MS” однозначно связана с номером группы абонента.

При точном, более сложном расчёте скорости передачи абонента $R_{аб.}$ (с известным значением мощности сигнала $P_c = 5,6235 \cdot 10^{-14} \text{ W}$ и требуемым суммарным отношением $\frac{E_{bit}}{I_t} = 0,7 = -1,549 \text{ дБ}$) синхронный ОК-2048

обеспечивает скорость абонента $R_{аб.} = 2,0 \cdot 10^6 \text{ бит} / \text{с.}$

Ширина всей рабочей полосы Reverse link $B_w = 2F \approx \frac{1}{\tau_{ch}} = 912 \text{ МГц}$ выбирается из

условия периодической передачи в канал коротких чипов BS. Точность синхронизации в обратной линии определяется также этим сигналом, $\Delta \tau \cdot D_{BS} = 0,1 \cdot \tau_{ch}$, т.е. относительная погрешность подстройки по времени $\frac{\Delta \tau}{\tau_{ch}}$ не должна превышать $\frac{0,1}{2^{16}-1} = 1,526 \cdot 10^{-6}$.

В заключение выполним расчёт помехоустойчивости в информационном подканале абонента в направлении MS – BS. Канал – непрерывный гауссовский с суммарной мощностью аддитивных помех $(\sigma^2 + J) = N_0 \cdot F + (M-1) \cdot \nu_f \cdot P_c$.

$$Q_{ош.ОК} \leq (N_d + (V_{акт.} - 1)) \cdot Q\left(\sqrt{\frac{E_{bit}}{I_t}} \cdot \gamma_{кан.ОК} \cdot d_{x_OK}\right). \quad (9)$$

Подставляя числовые значения, получим $Q_{ош.ОК} \leq 2058 \cdot Q(\sqrt{0,7 \cdot 0,043764 \cdot 1024}) = 2058 \cdot 1,072 \cdot 10^{-8} = 2,2062 \cdot 10^{-5}$. Согласно выр. (8), передача информации в обратном канале

абонента только с шумовой аддитивной помехой σ^2 выполнялась при $Q_{\text{ош.ОК}} = 2 \cdot 10^{-5}$.

Литература

1. Claude Elwood Shannon. Collected papers. Ed. by H.J.A. Sloane, Aaron D.Wyner. IEEE Press. Piscataway, N.J., USA. 1993, 924 p.
2. The Best of the Best. Ed. by William H. Tranter, Desmond P. Taylor, Rodger E. Ziemer, Nicholas F. Maxemchuk, Jon W. Mark. IEEE Press. A John Wiley & Sons, Inc., Publication . 2007, 692 p.
3. Кузнецов В.С., Кузнецов В.В. Нерешённые проблемы в области передачи информации и связи. - М.: Горячая линия – Телеком, 2016. – 60 с.
4. Кузнецов В.С. Асимптотические решения проблемы Шеннона в непрерывном гаусс - совском канале. – М.: Горячая линия – Телеком, 2021, - 72 с.
5. Кузнецов В.С. Асимптотическое достижение границы К.Э. Шеннона с применением кодов

плотнейшей поверхностью – сферической укладки. - М.: Системы синхронизации, формирования и обработки сигналов. № 1 – 2023, с. 62 – 67.

6. Кузнецов В.С. Синхронные ортогональные коды. – М.: Системы синхронизации, формирования и обработки сигналов. № 1 – 2024, с. 26 – 29.

7. Патент РФ на изобретение № 2834691. Способ помехоустойчивого кодирования троичным кодом с широкополосной передачей данных. Авторы: Кузнецов В.С., Волков А.С., Солодков А.В., Лоос В.В. Приоритет изобретения 14 июня 2024 г. Дата гос. регистрации 12 февраля 2025 г.

8. Kuznetsov V., Volkov A., Solodkov A., Loos V. High – Speed Ternary Error Correction Code // 2025 Conference Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (2025 ElCon), St. Petersburg Electrotechnical University “LETI”, 2025, January 28 – 29, St. Petersburg, Russia. – p. 1694 – 1697.

9. Каталог для систем связи и радиолокации. – М.: “ЭЛВИС “, www.elvees.ru. 2025, 24 с.